

均勻性的偏差度量

葉扶德 劉民千* 任朝宇

香港浸會大學數學系 *天津大學信息管理與管理科學系

摘 要

偏差是均勻性的一種重要度量。本文對定義在單位方體 $[0, 1]^s$ 和離散區域 $\{1, \dots, q\}^s$ 上的諸多偏差進行了介紹，討論了它們的性質，並給出了部分偏差的解析表達式。文中同時提及了將這些偏差作為均勻性度量的有關研究資料。

關鍵詞：反射不變性，再生核希爾伯特空間，均勻性，投影，偏差。

美國數學會分類索引：主要 65D30；次要 65D32。

1. 引言

均勻設計(uniform design)自1978年由王元和方開泰提出以來(參見方開泰(1978), Wang and Fang (1981)等),作為統計試驗設計的方法之一,已經在航空、化工、製藥、造船等諸多領域得到了廣泛地應用,取得了很大的經濟和社會效益。而大批均勻設計表則是建立在有合理的均勻性度量的基礎上構造出來的。基於不同的均勻性度量會構造出不同的均勻設計。到目前為止均勻性的度量有這樣幾種:一種是基於距離概念而提出來的,包括均方誤差(mean square error),散度(dispersion, Niederreiter (1983))以及最小最大距離(minimax distance)和最大最小距離(maximin distance, Johnson et al. (1990))等。一種是來自最優設計(optimal design)的度量,最優設計的很多準則,如A-最優、D-最優等,都能用作均勻性的度量。一種是基於幾何上的度量,這樣的度量如最小體積距離(minimum volume distance, Jiang and Chen (1987))和最大對稱差(maximum symmetric difference, Fang and Zhang (1992))等。還有一種均勻性度量是我們本文要介紹的,稱為偏差(discrepancy)。迄今為止的很多關於均勻性的研究顯示偏差度量有好多優良性質,以現有的某些偏差作為均勻性度量可以將均勻設計與正交設計(orthogonal design)和超飽和設計(supersaturated design)等明確地聯繫在一起。

偏差的概念是基於多維積分的數值計算而提出的。不失一般性,考慮求下列積分的近似值,

$$I(f) = \int_{C^s} f(x) dx,$$

其中 $C^s = [0, 1]^s$ 表示空間 R^s 中的單位方體。人們在許多研究領域中經常會遇到這個問題。例如:統計中多元連續分布的概率與矩的計算;貝氏分析中後驗密度的計算;計算機試驗中對某一確定性反應的期望值的估計;積分方程與微分方程的數值解等等。在低維情形,如被積函數 f 是光滑的,那麼經典的數值積分技術能提供非常優美的解。而在高維情形,通常用被積函數 f 在 C^s 上適當選取的 n 個樣本點 $P = \{x_1, \dots, x_n\}$ 處的函數值的算術平均

$$Q(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

來估計。爲了度量這種估計的精度，要考慮積分誤差 $I(f) - Q(f)$ ，當然我們希望這個值越接近於 0 越好。著名的 Koksma-Hlawka 不等式 (Niederreiter (1992)，定理 2.11) 給出了積分誤差的一個上界，

$$|I(f) - Q(f)| \leq D(P)V(f), \tag{1}$$

式中 $V(f)$ 給出函數 f 的波動大小，數學上稱爲全變差， $D(P)$ 給出點集 P 在 C^s 中的均勻分散的程度，稱爲 P 的偏差。對任一給定的積分函數空間，可以定義一個 $V(f)$ ，相應的有一個偏差 $D(P)$ ，不同的積分函數空間和 $V(f)$ 對應著不同的 $D(P)$ ，即 $D(P)$ 的定義依賴於 $V(f)$ 的定義。對於給定的偏差定義 $D(P)$ ，其大小只依賴於樣本點 P 的散佈情況。偏差 $D(P)$ 越小，則估計的誤差越小，所以我們應當選取使 $D(P)$ 達到極小的試驗點集 P ，即讓這 n 個點盡可能均勻地散佈於 C^s 中。

從統計學意義上講，偏差 $D(P)$ 實際上是一個擬合優度統計量 (goodness-of-fit statistic)，用來度量樣本點 P 的經驗分布函數 (empirical distribution) 偏離總體分布的程度，也即經驗分布對總體分布的擬合程度，參見 Hickernell (1999a) 和 Liang et al. (2000)。

到目前爲止，已有各種偏差被提了出來。這些偏差可分爲兩類，一類是定義在 C^s 連續區域上的偏差，另一類是定義在 $\{1, \dots, q\}^s$ 離散區域上的偏差，這一類偏差實際上是對前一類偏差的推廣，是爲了度量離散區域上布點的均勻性而提出的。

2. C^s 上的偏差

首先介紹部分記號，用 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ 或 $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{is})$ 表示單位方體 C^s 中的點，集合 $S = \{1, \dots, s\}$ 表示 C^s 的坐標軸，對於 S 的任一子集 u ， $|u|$ 表示 u 中元素的個數， R^u 表示由 u 所表示的坐標軸對應的 $|u|$ 維實數空間， C^u 表示 $|u|$ 維方體，它是 C^s 向 R^u 上的投影， \mathbf{x}_u 表示 \mathbf{x} 中由 u 代表的分量構成的 $|u|$ 維向量， $P = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ 爲 C^s 上的 n 個點組成的點集， P_u 表示 P 在方體 C^u 上的投影。 P 的經驗分布函數記爲

$$F_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{\mathbf{x}_i < \mathbf{x}\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_{i1} < x_1, \dots, x_{is} < x_s\}},$$

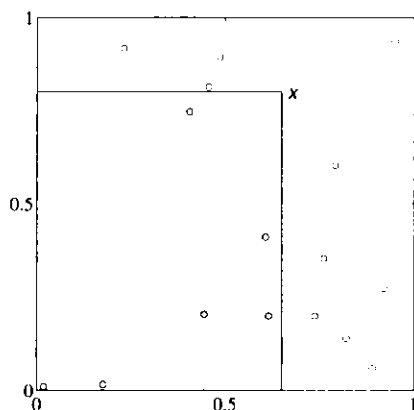


圖1 對 $\mathbf{x} = (0.65, 0.8)$, $\text{Vol}([0, \mathbf{x}]) = 0.52$, $N(P, [0, \mathbf{x}])/n = 6/16 = 0.375$, $R^*(\mathbf{x}) = 0.145$ 。

式中 $1_{\{\cdot\}}$ 為示性函數 (indicator function)，當 $\{\cdot\}$ 中的條件滿足時，取值為 1，否則為 0。令 $F(\mathbf{x})$ 為 C^s 上的均勻分布函數，即當 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s) \in C^s$ 時， $F(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^s x_i$ 。

I. L_p -星偏差 (L_p -star discrepancy)

令 $[0, \mathbf{x}] = [0, x_1] \times \dots \times [0, x_s]$ 為 C^s 中由原點 $\mathbf{0}$ 和 \mathbf{x} 決定的方體。令 $N(P, [0, \mathbf{x}])$ 為 P 中的點落入到 $[0, \mathbf{x}]$ 中的個數， $\text{Vol}([0, \mathbf{x}])$ 表示在 R^s 空間中 $[0, \mathbf{x}]$ 的體積。則當 P 中的點在 C^s 中散佈均勻時， $N(P, [0, \mathbf{x}])/n$ 應與 $\text{Vol}([0, \mathbf{x}]) = x_1 \cdots x_s$ 相接近，兩者的差

$$R^*(\mathbf{x}) = \text{Vol}([0, \mathbf{x}]) - \frac{N(P, [0, \mathbf{x}])}{n} = F(\mathbf{x}) - F_n(\mathbf{x}),$$

是對 P 在點 \mathbf{x} 處的經驗分布值與均勻分布值偏離程度的一個度量，其幾何意義參見圖 1。

在擬蒙特卡羅方法 (quasi-Monte Carlo methods) 或數論方法 (number-theoretic methods) 中，最普遍採用的 L_p -星偏差定義為

$$D_p^*(P) = \left\{ \int_{C^s} |R^*(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p},$$

當 $p \rightarrow \infty$ 時，上式化為

$$D^*(P) \equiv D_\infty^*(P) = \sup_{\mathbf{x} \in C^s} \left| \text{Vol}([0, \mathbf{x}]) - \frac{N(P, [0, \mathbf{x}])}{n} \right| = \sup_{\mathbf{x} \in C^s} |F(\mathbf{x}) - F_n(\mathbf{x})|, \tag{2}$$

在文獻中稱為星偏差(star discrepancy)。當 $p = 2$ 時， L_2 -星偏差為

$$D_2^*(P) = \left\{ \int_{C^s} |F(\mathbf{x}) - F_n(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right\}^{\frac{1}{2}}。$$

由(2)定義的星偏差最早由 Weyl (1916) 提出，後來 Smirnov-Kolmogorov 把它用於擬合優度檢驗。在擬蒙特卡羅方法的幾本專著中(如 Hua and Wang (1981), Niederreiter (1992))，星偏差均被放在重要的地位。但星偏差也有不少缺點，例如：1) 計算星偏差很費計算時間，當 n 和 s 增加時，計算星偏差在計算複雜性中是一個 NP Hard 問題；2) 星偏差把原點放在一個很特殊的地位，一切方體 $[0, \mathbf{x}]$ 均從原點開始。為了克服這個缺點，在式(2)中可將方體 $[0, \mathbf{x}]$ 換成 C^s 中更任意的方體 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x_1, y_1] \times \cdots \times [x_s, y_s]$ ，其中 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 為 C^s 中任兩點，由於這種偏差更不容易計算，尚未見到在實際中使用。

L_2 -星偏差的優點是易於計算，Warnock (1972) 導出如下公式

$$D_2^*(P) = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{x} \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{1 - x_j^2}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P} \prod_{j=1}^s [1 - \max(x_j, x'_j)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

當 s 固定時，上式的計算量為 $O(n^2)$ ，比星偏差的計算量大大減小。遺憾的是 L_2 -星偏差有時並不滿足 Koksma-Hlawka 不等式(1)。 L_2 -星偏差有更嚴重的缺點，它忽略了低維投影的偏差，即 $R^*(\mathbf{x})$ 在一個低於 s 維的流形上的值對計算 $D_2^*(P)$ 並不產生任何影響，因為在低於 s 維的流形上的積分為 0。而對均勻設計而言，試驗點投影到低維，尤其是一維和二維的均勻性十分重要，如果只關心 s 維均勻性而忽略了低維投影空間的均勻性，有時會給出不盡合理的結果。

為了克服 L_p -星偏差的諸多缺點，更好地度量試驗點的均勻性，Hickernell (1998a) 將 L_p -星偏差的定義推廣為

$$D_p(P) = \left\{ \sum_{\emptyset \subset u \subseteq S} w_u \int_{C^u} |R(\mathbf{x}_u)|^p d\mathbf{x}_u \right\}^{1/p}, \tag{4}$$

式中 $R(\mathbf{x}_u)$ 的定義類似 $R^*(\mathbf{x})$ ，即 $R(\mathbf{x}_u) = \text{Vol}(J(\mathbf{x}_u)) - N(P, J(\mathbf{x}_u))/n$ ，對任一 $\mathbf{x} \in C^s$ ，用某一事先確定的方式決定的方體記為 $J(\mathbf{x})$ ，它在 R^u 中的投

影記為 $J(\mathbf{x}_u)$ 。 $\text{Vol}(J(\mathbf{x}_u))$ 表示在 R^u 空間中 $J(\mathbf{x}_u)$ 的體積， $N(P, J(\mathbf{x}_u))$ 表示 P 中的點落入 $J(\mathbf{x}_u)$ 的個數， $d\mathbf{x}_u = \prod_{j \in u} dx_j$ 。 該類偏差稱作廣義的 L_p -偏差。 w_u 是對 R^u 空間的權重， 當 $w_S = 1$ ， 其餘的 $w_u = 0$ ， 且 $R(\mathbf{x}_u) = R^*(\mathbf{x})$ 時， 廣義的 L_p -偏差即為 L_p -星偏差。 本節中我們下面要介紹的幾種偏差均取所有的 $w_u = 1$ 。 這類廣義的 L_p -偏差不僅考慮了 P 在 C^S 中散佈的均勻性， 而且考慮了對 R^S 一切子空間投影的均勻性。

在定義(4)基礎上， Hickernell (1998a,b, 1999b) 提出了不同的 $J(\mathbf{x})$ ， 並對基於這些不同的 $J(\mathbf{x})$ 的偏差的性質、計算等進行了詳盡地闡述。 這些偏差包括修正的 L_p -星偏差、中心化偏差(centered discrepancy)、對稱偏差(symmetric discrepancy)、 L_2 -unanchored 偏差和 L_2 -wrap-around 偏差， 其中後兩種偏差的定義與(4)稍有不同。 所有這些偏差都滿足 Koksma-Hlawka 不等式(1)。 下面我們分別加以介紹。

II. 修正的 L_p -星偏差

修正的 L_p -星偏差是上面介紹的 L_p -星偏差的一個直接推廣。

取 $J(\mathbf{x}) = [0, \mathbf{x})$ ， 則有

$$R^*(\mathbf{x}) = \text{Vol}(J(\mathbf{x})) - \frac{N(P, J(\mathbf{x}))}{n}, \quad (5)$$

稱相應於(4)的偏差

$$MD_p^*(P) = \left\{ \sum_{\emptyset \subset u \subseteq S} \int_{C^u} |R^*(\mathbf{x}_u, 1)|^p d\mathbf{x}_u \right\}^{1/p}$$

為修正的 L_p -星偏差。 式中 $R^*(\mathbf{x}_u, 1)$ 指在(5)中令下標 $j \notin u$ 的 $x_j = 1$ 。 當 $p \rightarrow \infty$ 時， $MD_\infty^*(P) \rightarrow D^*(P)$ ， 即傳統的星偏差是修正的 L_p -星偏差的一個特例， 而當 $p < \infty$ 時， 傳統的 L_p -星偏差只是對應 $MD_p^*(P)$ 中 $u = S$ 的那部分， 即有

$$MD_p^*(P) > D_p^*(P)。$$

特別地， 當 $p = 2$ 時， 修正的 L_2 -星偏差有下面的表達式

$$MD_2^*(P) = \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{x} \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{3 - x_j^2}{2} \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P} \prod_{j=1}^s [2 - \max(x_j, x'_j)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

與 L_2 -星偏差式(3)相比，式(6)中三個括號中的每一項都要比式(3)中相應的項多1。

修正的 L_p -星偏差與傳統的 L_p -星偏差一樣，也是將原點放在了一個很特殊的地位，因此它不具有下面定義的反射不變性(reflection invariant)。

定義：稱偏差 $D(P)$ 具有反射不變性當且僅當對任一 C^s 中的點集 P 有

$$D(P) = D(P^{(1)}) = \dots = D(P^{(s)}),$$

其中 $P^{(j)}$ 是 P 中的點由通過方體 C^s 中心的平面 $x_j = 1/2$ 反射而得到的，即

$$P^{(j)} = \{(z_1, \dots, z_{j-1}, 1 - z_j, z_{j+1}, \dots, z_s) : (z_1, \dots, z_s) \in P\}。$$

我們下面要介紹的幾種偏差則都具有這樣的反射不變性，從而降低了原點 0 的特殊地位。

III. 中心化偏差

對任意兩點 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^s$ ，令 $J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 為介於 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 之間的方體區域，即

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{(t_1, \dots, t_s) : \min(x_j, y_j) \leq t_j < \max(x_j, y_j), j = 1, \dots, s\}。$$

為了減少原點 0 的特殊性，克服 $J(\mathbf{x}) = [0, \mathbf{x}]$ 的缺點，記 A 為單位方體的 2^s 個頂點，這 2^s 個頂點各自與中心點 $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ 之間決定了 2^s 個方體，這 2^s 個方體組成了 C^s 的一個剖分(partition)。任取 $\mathbf{x} \in C^s$ ，它必然落入這 2^s 個方體中的一個，記 $\mathbf{a}_\mathbf{x} \in A$ 為該方體的頂點，它與 \mathbf{x} 組成方體 $J(\mathbf{a}_\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 。令

$$R^c(\mathbf{x}) = \text{Vol}(J(\mathbf{a}_\mathbf{x}, \mathbf{x})) - \frac{N(P, J(\mathbf{a}_\mathbf{x}, \mathbf{x}))}{n},$$

$R^c(\mathbf{x}_u)$ 為 $R^c(\mathbf{x})$ 關於方體 C^u 和投影 P_u 的相應表達式。圖2給出了 $R^c(\mathbf{x})$ 的幾何圖示。相應的偏差

$$CD_p(P) = \left\{ \sum_{\emptyset \subset u \subset S} \int_{C^u} |R^c(\mathbf{x}_u)|^p d\mathbf{x}_u \right\}^{\frac{1}{p}}$$

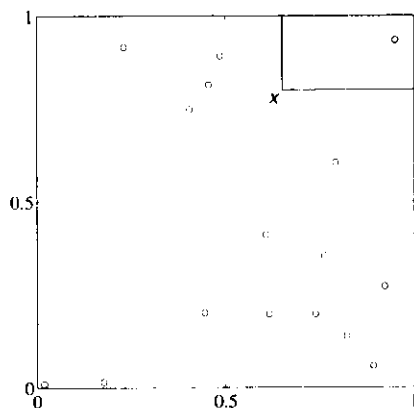


圖2 對 $\mathbf{x} = (0.65, 0.8)$, $\text{Vol}(J(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = 0.07$, $N(P, J(\mathbf{a}, \mathbf{x}))/n = 1/16 = 0.0625$, $R^c(\mathbf{x}) = 0.0075$ 。

稱為 L_p -中心化偏差。特別地當 $p = 2$ 時， L_2 -中心化偏差有下面的表達式：

$$CD_2(P) = \left\{ \left(\frac{13}{12} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{x} \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{1}{2} \left| x_j - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \left| x_j - \frac{1}{2} \right|^2 \right] + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{1}{2} \left| x_j - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \left| x'_j - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} |x_j - x'_j| \right] \right\}^{\frac{1}{2}}。$$

可以看到， L_2 -中心化偏差在計算時對 C^s 的 2^s 個頂點一視同仁，從而取消了原點的特殊地位。對任一 j ($1 \leq j \leq s$)，如將 x_j 換成 $1 - x_j$ ， CD_2 保持不變，即它具有反射不變性。

IV. 對稱偏差

對任一點 $\mathbf{x} \in C^s$ ，有 2^s 個方體 $J(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, $\mathbf{a} \in A$ 。我們將這 2^s 個方體分為奇、偶兩類 $J_o(\mathbf{x})$ 和 $J_e(\mathbf{x})$ ，其中 $J_e(\mathbf{x})$ 是頂點 \mathbf{a} 的坐標之和為偶數的所有方體 $J(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ 的集合，即 $\sum_{\mathbf{a} \in \mathbf{a}} a_i = 0 \pmod{2}$ ， $J_o(\mathbf{x})$ 是頂點 \mathbf{a} 的坐標之和為奇數的所有方體 $J(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ 的集合。令

$$R^s(\mathbf{x}) = \text{Vol}(J_e(\mathbf{x})) - \frac{N(P, J_e(\mathbf{x}))}{n} = -\text{Vol}(J_o(\mathbf{x})) + \frac{N(P, J_o(\mathbf{x}))}{n}，$$

其幾何意義見圖3。相應的偏差

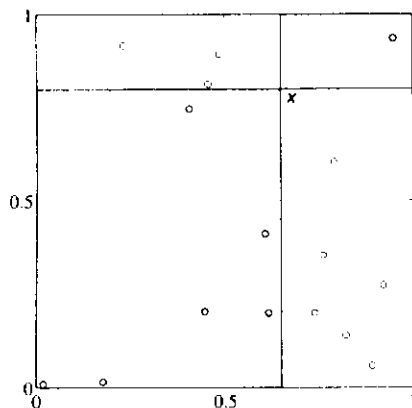


圖3 對 $\mathbf{x} = (0.65, 0.8)$, $\text{Vol}(J_e(\mathbf{x})) = 0.59$, $N(P, J_e(\mathbf{x}))/n = 7/16 = 0.4375$, $R^s(\mathbf{x}) = 0.1525$ 。

$$SD_p(P) = \left\{ \sum_{\emptyset \subset u \subseteq S} \int_{C^u} |2R^s(\mathbf{x}_u, 1)|^p d\mathbf{x}_u \right\}^{\frac{1}{p}}$$

稱為 L_p -對稱偏差。注意，這兒 $R^s(\mathbf{x}_u, 1)$ 前面有係數 2， $R^s(\mathbf{x}_u, 1)$ 的含義同 $R^*(\mathbf{x}_u, 1)$ 。特別地當 $p = 2$ 時， L_2 -對稱偏差有下面的表達式：

$$SD_2(P) = \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{x} \in P_{j=1}} \prod_{j=1}^s (1 + 2x_j - 2x_j^2) + \frac{2^s}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P_{j=1}} \prod_{j=1}^s (1 - |x_j - x'_j|) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

與修正的星偏差比較，對稱偏差將單個的方體 $[0, \mathbf{x}]$ 和 $[0, \mathbf{x}_u]$ 用方體的集合 $J_e(\mathbf{x})$ 和 $J_e(\mathbf{x}_u)$ 代替，降低了原點 0 的特殊影響，同中心化偏差一樣，這種偏差也具有反射不變性。

下面要介紹的這兩種偏差同樣也考慮了 P 對 R^s 一切子空間投影的均勻性，具有反射不變性，它們的定義與(4)稍有不同。

V. L_2 -Unanchored 偏差和 L_2 -Wrap-Around 偏差

L_p -unanchored 偏差由 Niederreiter (1992, 定義 2.2) 和 Morokoff and Caflisch (1994) 定義。該偏差是在 C^s 中形如 $[\mathbf{x}', \mathbf{x}] (\mathbf{x}' \leq \mathbf{x})$ 的方體中考慮試驗點的散佈情況。令

$$R^u(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \text{Vol}([\mathbf{x}', \mathbf{x}]) - \frac{N(P, [\mathbf{x}', \mathbf{x}])}{n},$$

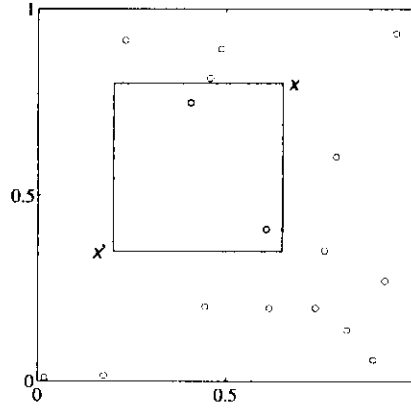


圖 4 對 $\mathbf{x}' = (0.2, 0.35)$ 和 $\mathbf{x} = (0.65, 0.8)$, $\text{Vol}([\mathbf{x}', \mathbf{x}]) = 0.2025$, $N(P, [\mathbf{x}', \mathbf{x}])/n = 2/16 = 0.125$, $R^u(\mathbf{x}) = 0.0775$ 。

圖 4 給出了 $R^u(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 的幾何圖示。同時考慮 P 在 C^s 的低維投影上相應的 $R^u(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)$ ，Hickernell (1998b, 1999b) 給出了下面的 $p = 2$ 時， L_2 -unanchored 偏差的定義形式及表達式，這個偏差滿足 Koksma-Hlawka 不等式 (1)。

$$\begin{aligned} UD_2(P) &= \left\{ \sum_{\emptyset \subset u \subseteq S} \int_{C^{2^u}, \mathbf{x}'_u \leq \mathbf{x}_u} |R^u(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)|^2 d\mathbf{x}'_u d\mathbf{x}_u \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \left(\frac{13}{12} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{x} \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{x_j(1-x_j)}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \min(x_j, x'_j) - x_j x'_j \right] \right\}^{\frac{1}{2}}。 \end{aligned}$$

在 unanchored 偏差中對方體 $[\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)$ 要求 $\mathbf{x}'_u \leq \mathbf{x}_u$ ，考慮 $\mathbf{x}'_u > \mathbf{x}_u$ 的情形，Hickernell (1998b, 1999b) 給出了下面的“方體”

$$J_w(x'_j, x_j) = \begin{cases} [x'_j, x_j], & x'_j \leq x_j \\ [0, x_j] \cup [x'_j, 1], & x_j < x'_j \end{cases}, \quad (7)$$

$$J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \bigotimes_{j=1}^s J_w(x'_j, x_j), \quad (8)$$

並令

$$R^w(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \text{Vol}(J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x})) - \frac{N(P, J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x}))}{n}, \quad (9)$$

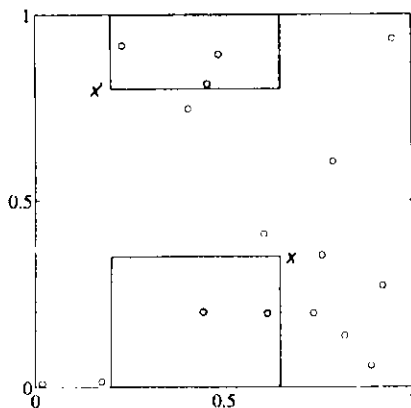


圖 5 對 $\mathbf{x}' = (0.2, 0.8)$ 和 $\mathbf{x} = (0.65, 0.35)$, $\text{Vol}(J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x})) = 0.2475$, $N(P, J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x}))/n = 5/16 = 0.3125$, $R^w(\mathbf{x}) = -0.065$ 。

它代表該“方體” $J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 的體積與落入其中試驗點的比例之差(參見圖5)，其相應的在 C^s 的低維投影上的形式記為 $R^w(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)$ ，則 L_2 -wrap-around 偏差為：

$$WD_2(P) = \left\{ \sum_{\emptyset \subset C_u \subseteq S} \int_{C^{2u}} |R^w(\mathbf{x}'_u, \mathbf{x}_u)|^2 d\mathbf{x}'_u d\mathbf{x}_u \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ -\left(\frac{4}{3}\right)^s + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[\frac{3}{2} - |x_j - x'_j|(1 - |x_j - x'_j|) \right] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

該偏差也滿足 Koksma-Hlawka 不等式(1)。

綜上所述，這裡 II、III、IV 和 V 給出的幾種偏差相對於 I 中傳統的 L_p -星偏差來說，有諸多好的性質，而且當 $p = 2$ 時，都有較為簡便的計算公式。利用這兒介紹的 $p = 2$ 時的幾種偏差作為均勻性的度量來構造均勻設計表，探討均勻性與正交性、均勻設計與正交設計及超飽和設計的關係的研究已取得了衆多滿意的結果，這樣的結果可參見 Fang and Winker (1998), Ma and Fang (1998), Fang and Mukerjee (2000), Fang, Ma and Winker (1999), Fang and Ma (1999), Ma and Fang (1999), Liu and Hickernell (2000) 等。

3. $\{1, \dots, q\}^s$ 上的偏差

上節介紹的各種偏差都是定義在連續區域 $C^s = [0, 1]^s$ 上的，用它們來作均勻性度量，可以考察因子是連續變量的設計點的均勻性。對於因子取離散水平的設計，要考察試驗點 $P = \{z_1, \dots, z_n\}$ 的均勻性，當然也可以應用這些偏差來考察。我們知道，對於具有 s 個 q 水平因子的設計，設 q 個水平為 $1, \dots, q$ ，這些因子所有可能的因子水平組合構成的空間記為 $\mathcal{X} = \{1, \dots, q\}^s$ ，則該空間中的點具有離散分布，而上節介紹的偏差是基於 C^s 空間上點具有連續均勻分布這一前提提出的。出於偏差是一個擬合優度統計量，用來度量試驗點的經驗分布偏離其總體分布的程度這一考慮，針對這種離散空間上的試驗點，我們首先給出上節中介紹的 L_p -星偏差， L_2 -unanchored 偏差和 L_2 -wrap-around 偏差在離散區域 \mathcal{X} 中的定義和相關的表達式，然後介紹 Liu and Hickernell (2000) 和 Hickernell and Liu (2000) 提出的另外兩種偏差。

I. 離散 L_p -星偏差

令 $[\mathbf{1}, \mathbf{x}] = \{1, 2, \dots, x_1 - 1\} \times \dots \times \{1, 2, \dots, x_s - 1\}$ 為 \mathcal{X} 中由 $\mathbf{1}$ 和 \mathbf{x} 決定的點組區域。令 $N(P, [\mathbf{1}, \mathbf{x}])$ 為 P 中的點落入到 $[\mathbf{1}, \mathbf{x}]$ 中的個數， $\text{Vol}([\mathbf{1}, \mathbf{x}])$ 表示 $[\mathbf{1}, \mathbf{x}]$ 在整個點組區域 \mathcal{X} 中所占的點數百分比。則當 P 中的點在 \mathcal{X} 中散佈均勻時， $N(P, [\mathbf{1}, \mathbf{x}])/n$ 應與 $\text{Vol}([\mathbf{1}, \mathbf{x}]) = \frac{(x_1-1)\cdots(x_s-1)}{q^s}$ 相接近，兩者的差

$$R^*(\mathbf{x}) = \text{Vol}([\mathbf{1}, \mathbf{x}]) - \frac{N(P, [\mathbf{1}, \mathbf{x}])}{n} = F_*(\mathbf{x}) - F_n(\mathbf{x}),$$

是對 P 在點 \mathbf{x} 處的經驗分布值與離散均勻分布值偏離程度的一個度量，這裡 $F_*(\mathbf{x})$ 為 \mathcal{X} 上的離散均勻分布。把離散 L_p -星偏差定義為

$$D_p^*(P) = \left\{ \frac{1}{q^s} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} |R^*(\mathbf{x})|^p \right\}^{1/p},$$

當 $p = 2$ 時，離散 L_2 -星偏差為

$$D_2^*(P) = \frac{1}{q^s} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \left\{ \left(\frac{(x_1-1)\cdots(x_s-1)}{q^s} \right)^2 - \frac{2}{n} \frac{(x_1-1)\cdots(x_s-1)}{q^s} \sum_{\mathbf{z} \in P} 1_{\{\mathbf{z} < \mathbf{x}\}} + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} 1_{\{\mathbf{z} < \mathbf{x}\}} 1_{\{\mathbf{z}' < \mathbf{x}\}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

其表達式如下：

$$D_2^*(P) = \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{6q^2} \right)^2 - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{z} \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{2q^2} z_j (z_j - 1) \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{q - \max(z_j, z'_j)}{q} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

若把離散 L_2 -星偏差表達式內的 z_j 和 z'_j 分別化作 qz_j 和 qz'_j ，則當 $q \rightarrow \infty$ 時，離散 L_2 -星偏差趨於 L_2 -星偏差。

此外，修正的離散 L_2 -星偏差的表達式如下：

$$MD_2^*(P) = \left\{ \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{6q^2} \right)^2 - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{z} \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2q} - \frac{1}{2q^2} z_j (z_j - 1) \right) + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} \prod_{j=1}^s \left(\frac{2q - \max(z_j, z'_j)}{q} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

II. 離散 L_2 -Unanchored 偏差和離散 L_2 -Wrap-Around 偏差

離散 L_2 -unanchored 偏差是在 \mathcal{X} 中形如 $[\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \{x'_1, x'_1 + 1, \dots, x_1 - 1\} \times \dots \times \{x'_s, x'_s + 1, \dots, x_s - 1\} (\mathbf{x}' < \mathbf{x})$ 的點組區域中考慮試驗點的散佈情況。同樣令

$$R^u(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \text{Vol}([\mathbf{x}', \mathbf{x})) - \frac{N(P, [\mathbf{x}', \mathbf{x}))}{n} .$$

它在幾何上代表的是點組區域 $[\mathbf{x}', \mathbf{x})$ 在整個點組區域 \mathcal{X} 中所占的點數百分比與落入該區域試驗點的比例之差。當 $p = 2$ 時，離散 L_2 -unanchored 偏差的定義式及表達式如下：

$$UD_2(P) = \left\{ \frac{1}{q^{2s}} \sum_{\substack{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X} \\ \mathbf{x}' < \mathbf{x}}} |R^u(\mathbf{x}', \mathbf{x})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = \left\{ \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12q^2} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{z} \in P} \prod_{j=1}^s \frac{z_j (q - z_j)}{2q^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[\frac{1}{q} \min(z_j, z'_j) - \frac{1}{q^2} z_j z'_j \right] \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

考慮試驗點在低維投影上的散佈情況，修正的離散 L_2 -unanchored 偏差的表達式為

$$MUD_2(P) = \left\{ \left(\frac{13}{12} - \frac{1}{12q^2} \right)^s - \frac{2}{n} \sum_{\mathbf{z} \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{z_j(q - z_j)}{2q^2} \right] + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[1 + \frac{1}{q} \min(z_j, z'_j) - \frac{1}{q^2} z_j z'_j \right] \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

注意到若把該表達式內的 z_j 和 z'_j 分別化作 qz_j 和 qz'_j ，則當 $q \rightarrow \infty$ 時，修正的離散 L_2 -unanchored 偏差趨於我們上節介紹的 L_2 -unanchored 偏差。

在離散 unanchored 偏差中對區域 $[\mathbf{x}', \mathbf{x}]$ 要求 $\mathbf{x}' \leq \mathbf{x}$ ，考慮 $\mathbf{x}' > \mathbf{x}$ 的情形，類似(11)，我們定義

$$J_w(\mathbf{x}', \mathbf{x}_j) = \begin{cases} [x'_j, x_j), & x'_j \leq x_j \\ [1, x_j) \cup [x'_j, q], & x_j < x'_j \end{cases} ,$$

其中 $[x'_j, x_j)$ 是指該區間內的整數點集，其餘類似。仍沿用定義式(12)和(13)，離散 L_2 -wrap-around 偏差為

$$\begin{aligned} WD_2(P) &= \left\{ \frac{1}{q^{2s}} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{X}} |R^w(\mathbf{x}', \mathbf{x})|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ - \left(\frac{1}{6q^2} - \frac{1}{2q} + \frac{1}{3} \right)^s + \frac{1}{n^2} \sum_{\mathbf{z}, \mathbf{z}' \in P} \prod_{j=1}^s \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{q} |z_j - z'_j| + \frac{1}{q^2} (z_j - z'_j)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

類似上述兩種離散偏差，當 q 趨於無窮盡時，該偏差也具有同樣的漸近性質。

III. 因子設計偏差

下面介紹 Hickernell and Liu (2000) 和 Liu and Hickernell (2000) 提出的另外兩種離散偏差，這兩種偏差是爲了度量部分因子設計 (fractional factorial design) 試驗點的均勻性而提出的，我們稱之爲因子設計偏差。而它們的定義

是建立在再生核(reproducing kernel)希爾伯特空間(Hilbert space)基礎上的。下面先介紹一下再生核的有關概念。

令 \mathcal{X} 是 R^s 的一個可測子集，我們稱函數 $K(x, w)$ 為某一希爾伯特空間(Hilbert space)的再生核，如果它關於它的變元是對稱的(symmetric)並且是正定的(positive definite)，即

$$K(x, w) = K(w, x), \text{任給 } x, w \in \mathcal{X}, \quad (10)$$

$$\sum_{i,j=1}^M a_i a_j K(x_i, x_j) \geq 0, \text{任給 } a_i \in R, x_i \in \mathcal{X}, M = 1, 2, \dots \circ \quad (11)$$

任一滿足(7)和(8)的二元函數 $K(x, w)$ 唯一確定一個希爾伯特空間。有關再生核希爾伯特空間的詳細討論可參見Saitoh (1988)和Wahba (1990)。

令 F 代表對應於 \mathcal{X} 的分布函數， F_n 代表試驗點 $P = \{z_1, \dots, z_n\} \subseteq \mathcal{X}$ 的經驗分布函數，那麼基於再生核 $K(x, w)$ ，可定義偏差

$$\begin{aligned} D(P; K) &= \left\{ \int_{\mathcal{X}^2} K(x, w) d[F(x) - F_n(x)] d[F(w) - F_n(w)] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \int_{\mathcal{X}^2} K(x, w) dF(x) dF(w) - \frac{2}{n} \sum_{z \in P} \int_{\mathcal{X}} K(x, z) dF(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} \sum_{z, z' \in P} K(z, z') \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (12) \end{aligned}$$

參見Hickernell (1999a)。實際上上節介紹的各種廣義的 L_2 -偏差都可以寫成(9)的形式，具體內容可參見Hickernell (1998b, 1999b)。

對於具有 s 個 q 水平因子的因子設計， $\mathcal{X} = \{1, \dots, q\}^s$ ，具有離散均勻分布 F_* ，Hickernell and Liu(2000)給出了下面的再生核和相應的偏差。令

$$\begin{aligned} \tilde{K}(x, w) &= \begin{cases} 1 & \text{如果 } x = w, \\ \frac{-1}{q-1} & \text{如果 } x \neq w, \end{cases} \text{對任給 } x, w \in \{1, \dots, q\}, \\ K(x, w) &= \prod_{j=1}^s [1 + \beta \tilde{K}(x_j, w_j)], \text{對任給 } x, w \in \mathcal{X}, \beta > 0, \end{aligned}$$

可知該 $K(x, w)$ 滿足(7)和(8)，是一個再生核。對試驗點 $P = \{z_1, \dots, z_n\}$ ，相應的偏差為

$$D(P; K) = \left\{ -1 + \frac{1}{n^2} \sum_{z, z' \in P} \prod_{j=1}^s [1 + \beta \hat{K}(z_j, z'_j)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

式中 $z = (z_1, \dots, z_s)$ 。對不同的 $\beta > 0$ ， $D(P; K)$ 可有不同的具體表達式。

Hickernell and Liu (2000) 利用該離散偏差(10)，對因子設計中衡量正交性的一些度量，如強度(strength)、分解度(resolution)和混雜(aberration)，與均勻性的關係進行了研究也都得到了滿意的結果。

在因子設計中，常見的是兩水平的因子設計。假設有 s 個兩水平因子，兩個水平分別為 1 和 2，則 $\mathcal{X} = \{1, 2\}^s$ ，有時兩個水平常用 -1 和 1 表示，這時 $\mathcal{X} = \{-1, 1\}^s$ 。不失一般性，我們假定 $\mathcal{X} = \{1, 2\}$ 。Liu and Hickernell (2000) 對度量兩水平情形下的試驗點的均勻性給出了如下的離散偏差。令

$$\tilde{K}_d(x, w) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x = w, \\ \rho & \text{如果 } x \neq w, \end{cases} \quad \text{對任給 } x, w \in \{1, 2\}, -1 \leq \rho < 1,$$

$$K_d(x, w) = \prod_{j=1}^s [1 + \beta \tilde{K}_d(x_j, w_j)], \quad \text{對任給 } x, w \in \mathcal{X}, \beta > 0,$$

易知 $K_d(x, w)$ 滿足(7)和(8)，是一個再生核，對兩水平試驗點 $P = \{z_1, \dots, z_n\}$ ，相應的離散偏差為

$$D(P; K_d) = \left\{ - \left[1 + \frac{\beta(1+\rho)}{2} \right]^s + \frac{1}{n^2} \sum_{z, z' \in P} \prod_{j=1}^s [1 + \beta \tilde{K}_d(z_j, z'_j)] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

可以驗證，當 $\rho = -1$ 時， $D(P; K_d)$ 與兩水平情形下的 $D(P; K)$ 是同一個偏差。

近些年來，作為兩水平因子設計的一種，兩水平因子超飽和設計得到了越來越廣泛地研究，已有好多研究成果出現，參見 Lin (1993, 1995), Wu (1993), Nguyen (1996), Tang and Wu (1997), Cheng (1997) 和劉民千、張潤楚 (1998, 2000) 等，而衡量這種設計的優良性的準則是 Booth and Cox (1962) 提出的 $E(s^2)$ 準則。Liu and Hickernell (2000) 利用 $D(P; K_d)$ 作為均勻性的度量，對兩水平因子超飽和設計的 $E(s^2)$ 最優性與試驗點的均勻性之間的關係進行了研究，得到了很好的結果。同時他們還將上節介紹的連續空間 C^s 上的有關偏差與離散偏差 $D(P; K_d)$ 有機地聯繫在了一起。

4. 結束語

本文針對均勻性的度量問題，對定義在連續空間 $C^s = [0, 1]^s$ 和離散空間 $X = \{1, \dots, q\}^s$ 上的諸多偏差進行了逐一介紹和討論，並給出了相應的計算表達式。文中同時還涉及了有關均勻性研究的諸多論文資料，有興趣的讀者可進一步參考這些資料，亦可作進一步的研究和探討。

致謝詞：本文的完成，得益於方開泰教授和馬長興博士提供的部分資料和技術幫助，作者謹致謝意。

參考文獻

- 方開泰(1978)。均勻設計——數論方法在試驗設計中的應用。概率統計通訊，1，56-97。中國科學院數學研究所，北京。
- 劉民千、張潤楚(1998)。 $E(s^2)$ 最優超飽和設計與 BIB 設計的對等關係。科學通報，43，2053-2056。
- 劉民千、張潤楚(2000)。一種構造 $E(s^2)$ 最優超飽和設計的方法。應用數學學報，23，1-14。
- Booth, K. H. V. and Cox, D. R. (1962). Some systematic supersaturated designs. *Technometrics* 4, 489-495.
- Cheng, C. -S. (1997). $E(s^2)$ -optimal supersaturated designs. *Statist. Sinica* 7, 929-939.
- Fang, K. T. and Ma, C. X. (1999). Relationship between uniformity and aberration, constructions of uniform designs in regular fractions 3^{s-1} . Technical Report MATH-243, Hong Kong Baptist University.
- Fang, K. T., Ma, C. X. and Winker, P. (1999). Centered L_2 -discrepancy of random sampling and latin hypercube design, and construction of uniform

- designs. Technical Report MATH-233, Hong Kong Baptist University. (To appear in *Math. Comp.*)
- Fang, K. T. and Mukerjee, R. (2000). A connection between uniformity and aberration in regular fractions of two-level factorials. *Biometrika* **87**, 193-198.
- Fang, K. T. and Winker, P. (1998). Uniformity and orthogonality. Technical Report MATH-176, Hong Kong Baptist University.
- Fang, K. T. and Zhang, J. T. (1992). Criteria for uniform design. Technical Report MATH-002, Hong Kong Baptist University.
- Hickernell, F. J. (1998a). A generalized discrepancy and quadrature error bound. *Math. Comp.* **67**, 299-322.
- Hickernell, F. J. (1998b). Lattice rules: how well do they measure up? in *Random and Quasi-Random Point Sets*. Springer Lecture Notes in Statistics, vol. **138**, Springer-Verlag, New York, 109-166.
- Hickernell, F. J. (1999a). Goodness-of-fit statistics, discrepancies and robust designs. *Statist. Probab. Lett.* **44**, 73-78.
- Hickernell, F. J. (1999b). What affects the accuracy of quasi-Monte Carlo quadrature? *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods* (H. Niederreiter and J. Spanier, eds.). Springer-Verlag, Berlin, 16-55.
- Hickernell, F. J. and Liu, M. Q. (2000). Uniform designs limit aliasing. Technical Report MATH-275, Hong Kong Baptist University.
- Hua, L. K. and Wang, Y. (1981). *Applications of Number Theory to Numerical Analysis*. Springer-Verlag and Science Press, Berlin and Beijing.
- Jiang, S. and Chen, R. C. (1987). Homogeneous designs of Latin square type. *Applied Math., A Journal of Chinese Universities* **2**, 532-541.

- Johnson, M. E., Moore, L. M. and Ylvisaker, D. (1990). Minimax and maximin distance designs. *J. Statist. Plann. and Inference* **26**, 131-148.
- Liang, J. J., Fang, K. T., Hickernell, F. J. and Li, R. Z. (2000). Testing multivariate uniformity and its applications. (To appear in *Math. Comp.*)
- Lin, D. K. J. (1993). A new class of supersaturated designs. *Technometrics* **35**, 28-31.
- Lin, D. K. J. (1995). Generating systematic supersaturated designs. *Technometrics* **37**, 213-225.
- Liu, M. Q. and Hickernell, F. J. (2000). Connections between uniformity and $E(s^2)$ -optimality in 2-level Supersaturated Designs, manuscript.
- Ma, C. X. and Fang, K. T. (1998). Applications of uniformity to orthogonal fractional factorial designs. Technical Report MATH-193, Hong Kong Baptist University.
- Ma, C. X. and Fang, K. T. (1999). Some connections between uniformity, orthogonality and aberration in regular fractional factorial designs. Technical Report MATH-248, Hong Kong Baptist University.
- Morokoff, W. J. and Caflisch, R. E. (1994). Quasi-random sequences and their discrepancies. *SIAM J. Sci. Comput.* 1251-1279.
- Nguyen, N.-K. (1996). An algorithmic approach to constructing supersaturated designs. *Technometrics* **38**, 69-73.
- Niederreiter, H. (1983). A quasi-Monte Carlo method for the approximate computation of the extreme values of a function. *Studies in Pure Mathematics* (To the memory of Paul Turán). Birkhäuser, Basel, 523-529.
- Niederreiter, H. (1992). *Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. SIAM, Philadelphia.

- Saitoh, S. (1988). *Theory of Reproducing Kernels and Its Applications*. Longman Scientific and Technical, Essex, England.
- Tang, B. and Wu, C. F. J. (1997). A method for constructing supersaturated designs and its $E(s^2)$ optimality. *Canad. J. Statist.* **25**, 191-201.
- Wahba, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*. SIAM, Philadelphia.
- Wang, Y. and Fang, K. T. (1981). A note on uniform distribution and experimental design. *Chinese Science Bulletin* **26**, 485-489.
- Warnock, T. T. (1972). Computational investigations of low discrepancy points sets. *Applications of Number Theory to Numerical Analysis* (S. K. Zaremba, ed.). Academic Press, New York, 319-343.
- Weyl, H. (1916). Über die Gleichverteilung der Zahlen mod Eins. *Math. Ann.* **77**, 313-352.
- Wu, C. F. J. (1993). Construction of supersaturated designs through partially aliased interactions. *Biometrika* **80**, 661-669.

[民國89年6月19日收稿，民國89年9月18日接受。]

Discrepancy measures of uniformity

Fred J. Hickernell, Min-Qian Liu* and Chiu-Yu Yam

Department of Mathematics, Hong Kong Baptist University

* Department of Information Management and Management Science,
Tianjin University

ABSTRACT

Discrepancies are important measures of uniformity. In this paper, different discrepancies defined on a unit cube $[0, 1]^s$ and a discrete domain $\{1, \dots, q\}^s$ are introduced and their properties are discussed. Analytical expressions of some discrepancies are also given. And studies on the application of these discrepancies as measures of uniformity are mentioned at the same time.

Key words and phrases: Discrepancy, projection, reflection invariant, reproducing kernel Hilbert space, uniformity.

AMS 1991 subject classifications: Primary 65D30; secondary 65D32.