Journal of the Chinese
Statistical Association
Vol. 47, (2009) 272–296

估計單指標模型中單一解釋變數的主效應

鄭明燕[1]　　沈愈騰[2]

[1]Department of Statistical Science, University College London
[2]台灣大學數學系

摘　要

Efromovich (2005) 提出利用輔助變數估計一元無母數迴歸的方法, 並發展出在輔助變數存在時無母數迴歸的漸進最佳預測 (asymptotically optimal nonparametric univariate regression estimation in the presence of auxiliary covariate) 的定理。Efromovich (2005) 先估計 $h(X,Z) = \mathrm{E}(Y|X,Z) - \mathrm{E}(Y|X)$, 然後用 Y 扣掉它, 產生降噪散點圖 (denoised scattergram), 以此來估計 $\mathrm{E}(Y|X = x)$, 這裡 Z 是一個輔助變數。本篇論文討論在單指標模型中, 如何估計單一解釋變數的主效應, 我們以 Efromovich (2005) 文章中的方法爲基礎, 對 $h(x,z)$ 重新估計, 產生降噪散點圖 (denoised scattergram) 來估計 $f(x) = \mathrm{E}(Y|X = x)$, 並證明此估計也是一個漸進尖銳極小化最大值估計 (asymptotic sharp minimax estimate)。

關鍵詞: 漸進尖銳極小化最大值估計, 輔助變數, 降噪散點圖, 無母數迴歸, 單指標模型。
JEL classification: C13, C14.

1. 導論

考慮一元無母數迴歸模型,

$$Y_l = f(X_l) + \eta_l, \tag{1}$$

這裡 $f(X_l) = \mathrm{E}(Y|X_l)$, $\{(Y_l, X_l), l = 1, 2, \ldots, n\}$ 爲來自母體 (Y, X) 的 n 個隨機樣本, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ 是迴歸誤差, 另外 X 取值於 $[0,1]$。Efromovich (2005) 討論迴歸誤差太大的狀況時, 用 $\{(Y_l, X_l), l = 1, 2, \ldots, n\}$ 的資訊估計 $f(x)$ 會十分困難, 例如當一個實驗有許多解釋變數的時候。Efomovich (2005) 於是引入輔助變數, 藉由和 X 獨立的輔助變數 Z 去消除太大的迴歸誤差來估計 $f(x)$。方式如下, 首先令 $\{Z_l, l = 1, \ldots, n\}$ 是已知的輔助變數, Z 取值於 $[0,1]^d$, 且 X 和 Z 是互相獨立的。則 (1) 式可重寫爲

$$Y_l = f(X_l) + h(X_l, Z_l) + \varepsilon_l, \tag{2}$$

這裡 $h(X_l, Z_l) = \mathrm{E}(Y_l|X_l, Z_l) - f(X_l)$, $\varepsilon_l = \eta_l - h(X_l, Z_l)$, 另外我們定義 $g(X_l, Z_l) = \mathrm{E}(Y_l|X_l, Z_l)$。Efromovich (2005) 先考慮 $h(x, z)$ 爲已知時, (2) 式則可寫爲

$$Y_l^* = f(X_l) + \varepsilon_l, \tag{3}$$

這裡 $Y_l^* = Y_l - h(X_l, Z_l)$。從 (3) 式來看, 我們便可以使用 Efromovich and Pinsker (1996) 的方法, 用 $\hat{\theta}_r^*$ 估計 $f(x)$ 的傅立葉係數 $\theta_r = \int f(x)\varphi_r(x)dx$ (註: $\varphi_0(x) = 1, \varphi_r(x) = \sqrt{2}\cos(r\pi x)$ 。)

$$\hat{\theta}_r^* = \sum_{l=1}^{n} Y_{(l)}^* A_{rl}, \tag{4}$$

這裡 $A_{rl} = s^{-1}\int_{B_l}\varphi_r(x)dx$, $s = 2\lfloor \ln(\ln(n{+}20)){+}1 \rfloor$, $B_l = \left[X_{(\max(0, l-(\frac{1}{2}s)))}, X_{(\min(l+(\frac{1}{2}s), n+1))}\right]$, $X_{(l)}$ 是 $X_1, \ldots, X_n$ 的排序, 且相同的符號被使用在其對應的變數, 而且 $X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$, $Y_{(l)}^* = Y_{(l)} - h(X_{(l)}, Z_{(l)})$。然後我們可以以 $\hat{\theta}_r^*$ 爲基礎, 找到一個 $f(x)$ 的估計式,

$$\hat{f}(\{\hat{\theta_j^*}\}, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \hat{\theta_j^*} \varphi_j(x),$$

這裡 μ_j 是特定的 shrinkage coefficients, $\mu_j = \mu_j(n, \mathcal{F})$, $0 \le \mu_j \le 1$, $n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j^2 = O(1)n^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j = O(1) \times n^{-2\alpha/(2\alpha+1)}$, 且它是一個漸進尖銳極小化最大值估計 (asymptotic sharp minimax estimate), 也就是說,

$$\begin{aligned}
&\sup_{f \in F(\alpha, Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta_j^*}\}, x) - f(x))^2 dx \\
&= (1 + o(1)) \inf_{\check{f}^*(x)} \sup_{f \in \mathcal{F}(\alpha, Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\check{f}^*(x) - f(x))^2 dx \\
&= T(\alpha) Q^{\frac{1}{2\alpha+1}} \left[n^{-1}\int_0^1 \sigma^2(x) P_1^{-1}(x) dx \right]^{2\alpha/(2\alpha+1)} (1 + o(1)),
\end{aligned}$$

這裡 $T(\alpha)=[2\alpha/(2\pi(\alpha+1))]^{2\alpha/2\alpha+1}(2\alpha+1)^{1/(2\alpha+1)}$, $\sigma^2(x)=\mathrm{Var}(\varepsilon|X=x)$, $P_1(x)$ 是 X 的機率密度函數, $\check{f}^*(x)$ 是知道 $h(x,z)$ 之下預測 $f(x)$ 的所有方法, 其中 $\mathcal{F}(\alpha,Q)$ 爲一個 Sobolev class,

$$\mathcal{F}(\alpha,Q)=\left\{f: f(x)\text{ 爲 }\alpha\text{ 次可微}, f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\theta_j\varphi_j(x), \theta_0^2+\sum_{j=1}^{\infty}(\pi j)^{2\alpha}\theta_j^2\le Q<\infty\right\},\ \alpha\ge 1。$$

從 $h(x,z)$ 已知爲出發點, 再回到未知的狀況, Efromovich (2005) 想辦法找到一個 $h(x,z)$ 的估計式 $\tilde{h}(x,z)$ 然後定義 $\tilde{Y}_{(l)}$ 爲

$$\tilde{Y}_{(l)}=Y_{(l)}-\tilde{h}(X_{(l)},Z_{(l)}),$$

再用 $\tilde{Y}_{(l)}$ 取代 $Y^*_{(l)}$ 代入 (4) 式, 因而求得

$$\hat{\theta}_r=\sum_{l=1}^{n}\tilde{Y}_{(l)}A_{rl}。$$

最後用 $\hat{\theta}_r$ 估計 θ_r, 並證明以 $\hat{\theta}_r$ 爲基礎的估計式:

$$\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\},x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j\hat{\theta}_j\varphi_j(x),$$

也是一個漸進尖銳極小化最大值估計。

我們以 Efromovich (2005) 的方法爲基礎, 討論在單指標模型中, 如何估計 $f(x)=\mathrm{E}(Y|X=x)$, 並證明此估計量也是一個漸進尖銳極小化最大值估計。

第二節我們先考慮: $d=1$, $\mathrm{E}(Y|X=x,Z=z)=g(x,z)=g_1(x+z)$ 的狀況 (g_1 是定義在 $[0,2]$ 的實函數且 $g_1\in L^2[0,2]$), 找出 $h(x,z)$ 的一個展式, 想辦法找到合理的 $\tilde{h}(x,z)$ 去估計 $h(x,z)$, 然後說明:

$$\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\},x)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j\hat{\theta}_j\varphi_j(x)$$

也是一個漸進尖銳極小化最大值估計, 換句話說,

$$\begin{aligned}&\sup_{f\in F(\alpha,Q)}\mathrm{E}\int_0^1(\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\},x)-f(x))^2dx\\&=(1+o(1))\inf_{\check{f}^*(x)}\sup_{f\in\mathcal{F}(\alpha,Q)}\mathrm{E}\int_0^1(\check{f}^*(x)-f(x))^2dx。\end{aligned}$$

第三節討論 $d>1$, $\mathrm{E}(Y|X=x,Z=z)=g(x,z)=g_1(x+\beta' z)$, ($\beta$ 已知) 的狀況, $d>1$ 可歸約爲 $d=1$ 的狀況討論, 然後也用類似的方法找到一個漸進尖銳極小化最大值估計。

2. 單元輔助變數情況下的討論

定義:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x),$$
$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \psi_k(x) = \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right),$$

則 $\{\varphi_k(x)|k = 0, 1, \ldots\}$ 爲 $L^2[0, 1]$ 的一組正規基底, $\{\psi_k(x)|k = 0, 1, \ldots\}$ 爲 $L^2[0, 2]$ 的一組正規基底。

定理 1. 設

$$a_i = \int_0^2 g_1(t)\psi_i(t)dt,\ C_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_j(x)dx,\ i = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 \cos\frac{i\pi x}{2}\varphi_j(x)dx,\ i \neq 0, \end{cases} \quad D_{i,j} = \int_0^1 \sin\frac{i\pi x}{2}\varphi_j(x)dx,$$

且 $f(x) =: \mathrm{E}[Y|X = x] \in L^2[0, 1]$, 則

$$\begin{aligned} h(x, z) = &\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &- \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x)。\end{aligned}$$

設 $T = X + Z,\ T_l = X_l + Z_l$。因爲,

$$\mathrm{E}(Y|X = x, Z = z) = g_1(x + z),$$

所以,

$$\mathrm{E}(Y|T = t) = g_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i(t)。$$

如果我們知道 T 的機率密度函數 p, 我們可以用 $\hat{a}_i$ 來估計 a_i,

$$\hat{a}_i = n^{-1}\sum_{l=1}^{n} Y_l\psi_i(T_l)p^{-1}(T_l),$$

因爲

$$\mathrm{E}[\hat{a}_i] = \mathrm{E}\{g_1(T)\psi_i(T)p^{-1}(T)\} = \int_0^2 g_1(t)\psi_i(t)dt = a_i。$$

但是往往我們不知道 T 的機率密度函數 p, 所以我們會用 $\tilde{a_i}$ 來估計,

$$\tilde{a_i} = n^{-1}\sum_{l=1}^{n} Y_l\psi_i(T_l)\tilde{p}^{-1}(T_l),\ \tilde{p}(x) = \max\left(\gamma_n, \sum_{l=1}^{N_p}\tilde{p}_i\psi_i(x)\right),\ \tilde{p}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\psi_i(T_l),$$

$$N_p = 1 + \lfloor [\ln(n)]^{\ln(\ln(n+20))}\rfloor,\ \gamma_n = \frac{1}{2\ln(\ln(n+20))}。$$

我們可以用 $\bar{\psi}_i^1$ 和 $\bar{\psi}_i^2$ 分別估計 $\mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]$ 和 $\mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]$,

$$\bar{\psi}_i^1 = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi Z_l}{2}\right),\ \bar{\psi}_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sin\left(\frac{i\pi Z_l}{2}\right),\ \bar{\psi}_0^1 = 1,\ \bar{\psi}_0^2 = 0。$$

因為定理 1, 我們知道

$$\begin{aligned} h(x,z) = &\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &- \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x)。\end{aligned}$$

因此我們用 $\tilde{h}(x,z)$ 來估計 $h(x,z)$:

$$\tilde{h}(x,z) = \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h}\tilde{a}_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right]\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h}\tilde{a}_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^2\right]\varphi_j(x),$$

其中 $N_h = \lfloor \ln(n) + 5\rfloor$, 我們求得 $\tilde{h}(x,z)$ 以後, 再用 $\tilde{Y}_{(l)}$ 模仿 $Y_{(l)}^*$ 代入 (3) 式,

$$\tilde{Y}_{(l)} = Y_{(l)} - \tilde{h}(X_{(l)}, Z_{(l)}),$$

而求得:

$$\hat{\theta}_r = \sum_{l=1}^{n}\tilde{Y}_{(l)}A_{rl},$$

然後用 $\hat{\theta}_r$ 替代 $\hat{\theta}_r^*$ 來估計 θ_r。

定理 2. 假設:

(1) 存在 a 使得 $p(t) \geq a \geq 0$ 對於所有的 $t \in [0,2]$, 即 T 有大於 0 的下界 (T is bounded below from 0), 且 $p(t) \in C^1$, 另外, X 和 Z 也是如此,

(2) $E(\varepsilon_l^4) < C < \infty$,

(3) $h(x,z)$, $f(x)$ 有界,

則

$$E(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_r^*)^2 = c_{nr} n^{-1},$$

這裡 $c_{nr} \le I(r \le N_h)c_r + c_n^*,\ c_r \le CN_h,\ c_n^* \to 0$，當 $n \to \infty$。

定理 3. 在與定理 2 同樣的假設下,

$$\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\}, x) - f(x))^2 dx \le (1 + o(1))\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j^*\}, x) - f(x))^2 dx,$$

這裡 $o(1)$ 均勻收斂到 0, 對於 $f \in \mathcal{F}(\alpha, Q)$。

根據定理 3, 以及

$$\begin{aligned}&\sup_{f\in F(\alpha,Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j^*\}, x) - f(x))^2 dx\\ &= (1 + o(1)) \inf_{\check{f}^*(x)} \sup_{f\in\mathcal{F}(\alpha,Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\check{f}^*(x) - f(x))^2 dx,\end{aligned}$$

我們可知

$$\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\}, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \hat{\theta}_j \varphi_j(x),$$

也是一個漸進尖銳極小化最大值估計,

$$\begin{aligned}&\sup_{f\in F(\alpha,Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\}, x) - f(x))^2 dx\\ &= (1 + o(1)) \inf_{\check{f}^*(x)} \sup_{f\in\mathcal{F}(\alpha,Q)} \mathrm{E}\int_0^1 (\check{f}^*(x) - f(x))^2 dx。\end{aligned}$$

3. 多元輔助變數情況下的討論

考慮 $d > 1$, $\mathrm{E}(Y|X = x, Z = z) = g(x, z) = g_1(x + \beta' z)$, ($\beta$ 已知) 的狀況, 定義

$$\min_{Z\in[0,1]^d} \beta' Z = c_\beta,\quad \max_{Z\in[0,1]^d} \beta' Z = d_\beta,$$

則 $c_\beta \le X + \beta' Z \le d_\beta + 1$。令 $r_\beta = d_\beta - c_\beta + 1$, 跟 $d = 1$ 時類似的, 我們可以定義

$$\begin{aligned}&\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x),\\ &\psi_0^\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{r_\beta}},\ \psi_k^\beta(x) = \sqrt{\frac{2}{r_\beta}}\cos\left(\frac{k\pi x}{r_\beta}\right),\end{aligned}$$

則 $\{\varphi_k(x)|k=0,1,\ldots\}$ 為 $L^2[0,1]$ 的一組正規基底, $\{\psi_k^\beta(x)|k=0,1,\ldots\}$ 為 $L^2[c_\beta,d_\beta+1]$ 的一組正規基底。同樣地, 我們可以用證明定理 1 的方法, 來得到 $h(x,z)$ 的一個展式。設

$$a_i^\beta = \int_{c_\beta}^{d_\beta+1} g_1(t)\psi_i^\beta(t)dt,$$

$$C_{i,j}^\beta = \begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_j(x)dx, i=0, \\ \int_0^1 \cos\frac{i\pi x}{r_\beta}\varphi_j(x)dx,\ i\neq 0, \end{cases}$$

$$D_{i,j}^\beta = \int_0^1 \sin\frac{i\pi x}{r_\beta}\varphi_j(x)dx,$$

且 $f(x) =: \mathrm{E}[Y|X=x]\in L^2[0,1]$, 則

$$\begin{aligned} h(x,z) = &\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{r_\beta}}a_i^\beta C_{i,j}^\beta\left[\cos\left[\frac{i\pi\beta' z}{r_\beta}\right]-\mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi\beta' Z}{r_\beta}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &-\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{r_\beta}}a_i^\beta D_{i,j}^\beta\left[\sin\left[\frac{i\pi\beta' z}{r_\beta}\right]-\mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi\beta' Z}{r_\beta}\right]\right]\varphi_j(x), \end{aligned}$$

然後定義

$$T_l^\beta = X_l+\beta' Z_l,$$

$$\tilde{p}_i^\beta = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\psi_i^\beta(T_l^\beta), N_p = 1+\lfloor[\ln(n)]^{\ln(\ln(n+20))}\rfloor, \gamma_n = \frac{1}{\gamma_\beta\ln(\ln(n+20))}。$$

$$\tilde{p}^\beta(x) = \max\left(\gamma_n, \sum_{l=1}^{N_p}\tilde{p}_i^\beta\psi_i^\beta(x)\right),$$

$$\tilde{a}_i^\beta = n^{-1}\sum_{l=1}^{n}Y_l\psi_i^\beta(T_l^\beta)/\tilde{p}^\beta(T_l^\beta),$$

$$\bar{\psi}_{i\beta}^1 = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\cos\left(\frac{i\pi\beta' Z_l}{r_\beta}\right), \bar{\psi}_{i\beta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sin\left(\frac{i\pi\beta' Z_l}{r_\beta}\right),$$

我們用 $\tilde{h}(x,z)$ 估計 $h(x,z)$,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x,z) = &\sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h}\sqrt{\frac{2}{r_\beta}}\tilde{a}_i^\beta C_{i,j}^\beta\left[\cos[\frac{i\pi\beta' z}{r_\beta}]-\bar{\psi}_{i\beta}^1\right]\varphi_j(x) \\ &-\sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h}\sqrt{\frac{2}{r_\beta}}\tilde{a}_i^\beta D_{i,j}^\beta\left[\sin[\frac{i\pi\beta' z}{r_\beta}]-\bar{\psi}_{i\beta}^2\right]\varphi_j(x), \end{aligned}$$

$$N_h = \lfloor\ln(n)+5\rfloor。$$

我們定義

$$\hat{\theta}_r^{\beta} = \sum_{l=1}^{n} (Y_{(l)} - \tilde{h}(X_{(l)}, Z_{(l)}))A_{rl},$$

跟 $d = 1$ 時類似地, 我們可以證明

$$\hat{f}(\{\hat{\theta}_j^{\beta}\}, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_j \hat{\theta}_j^{\beta} \varphi_j(x),$$

也是一個漸進尖銳極小化最大值估計。

4. 模擬結果

以下實驗 1, 2 和 3, 我們分別將初始散點圖 $\{(X_l, Y_l)\}$ (簡稱 IS), 和降噪散點圖 $\{(X_l, \tilde{Y}_l)\}$ (簡稱 DS) 代入 Efromovich (1999, sec. 4.2) 的方法求 $f(x)$, 得到模擬的結果。

1. $g(x,z) = 6(x+z-1)^2 - 1,\ f(x) = 6x^2 - 6x + 1;$

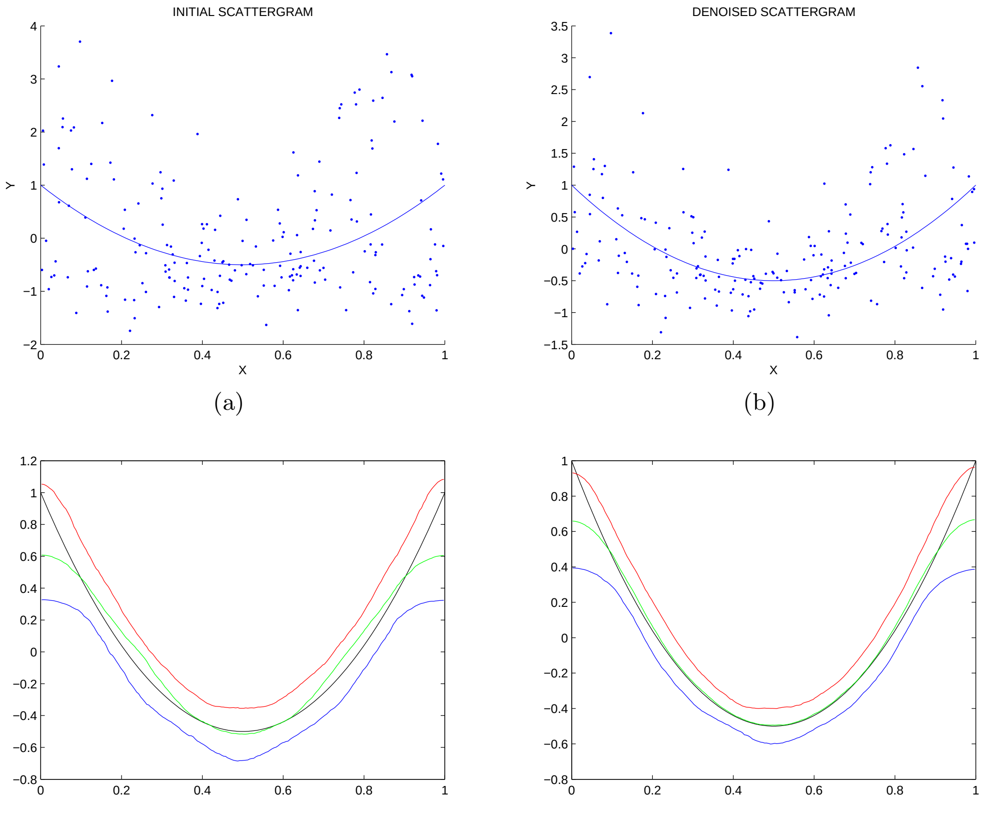
2. $g(x,z) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+2z)\right),\ f(x) = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right);$

3. $g(x,z) = \exp(x+z),\ f(x) = \exp(x)(\exp(1)-1);$

圖 1–4 爲實驗 1 和 2 的模擬結果, 模擬的誤差 (error) 服從 $N(0, 0.1)$, 樣本數 $n = 200, 400$。X 和 Z 皆服從 $[0, 1]$ 的均勻分布 (uniform distribution)。

除了 IS estimate 和 DS estimate 以外, 我們用 $\{(X_l, Y_l - h(X_l, Z_l))\}$ 代入 Efromovich (1999, sec. 4.2) 的方法, 得到 oracle estimate。然後經過 500 次模擬, 求出它們的 ISE 的平均值, 分別以 AISEIS, AISEDS, AISEO 表示。我們討論 $n = 200, 400$, 誤差服從 $N(0, 0.1)$, $N(0, 0.5)$, $N(0, 1)$ 的狀況, 並將 $(\frac{AISEDS}{AISEIS})100$, $(\frac{AISEO}{AISEDS})100$ 展示在表 1 和表 2。從表 1, 2 中, 可以知道 DS estimate 比 IS estimate 好, 而且當變異數固定, n 變大時, $(\frac{AISEDS}{AISEIS})100$ 有變小的趨勢, $(\frac{AISEO}{AISEDS})100$ 有變大的趨勢。

至於實驗 3, 模擬的結果 DS estimate 沒有像實驗 1, 2 明顯比 IS estimate 好, 但是 AISEDS 算出的結果仍然是比 AISEIS 小的, 表 3 提供五百次模擬所算出的 $(\frac{AISEDS}{AISEIS})100$。



(a) (b) (c) (d)

圖 1 $n = 200$, (a) 和 (b) 分別是實驗 1 $\{(X_l, Y_l)\}$ 和 $\{(X_l, \tilde{Y}_l)\}$ 的散點圖。(c) 和 (d) 分別爲實驗 1 中 IS 估計和 DS 估計的第九十百分位數曲線 (紅線), 第五十百分位數曲線 (綠線), 第十百分位數曲線 (藍線) 和眞實曲線 (黑線)。

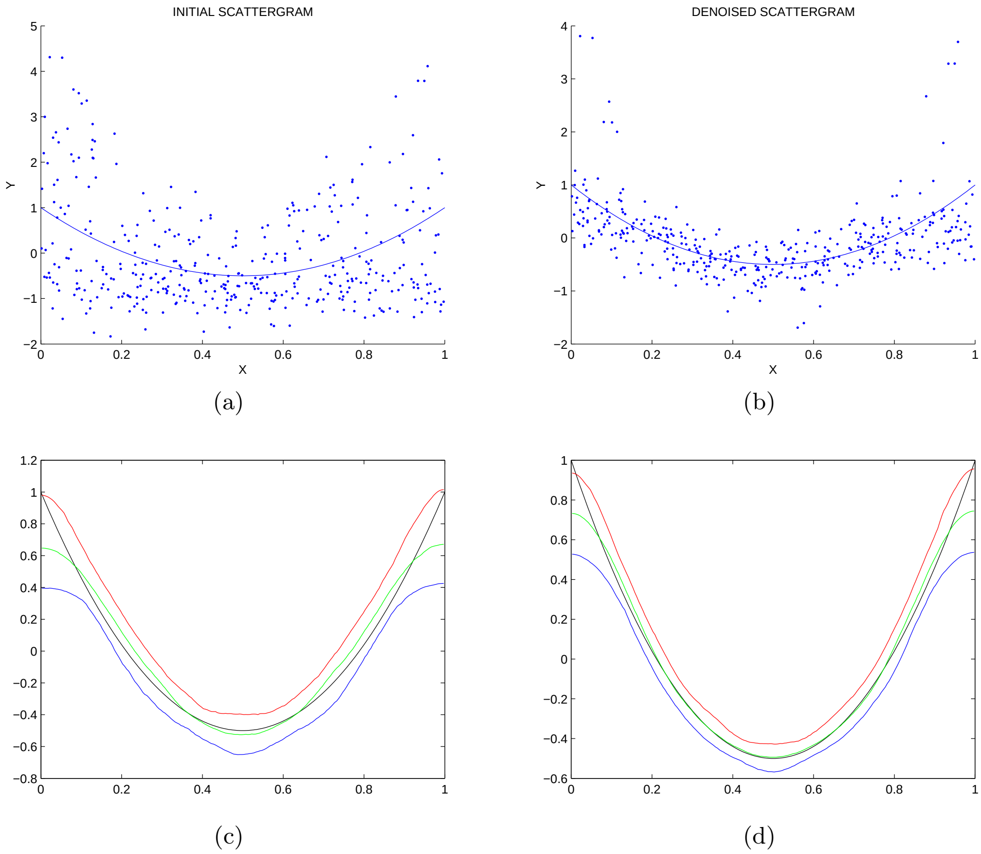


圖 2　$n = 400$, (a) 和 (b) 分別是實驗 1 $\{(X_l, Y_l)\}$ 和 $\{(X_l, \tilde{Y}_l)\}$ 的散點圖。(c) 和 (d) 分別爲實驗 1 中 IS 估計和 DS 估計的第九十百分位數曲線 (紅線), 第五十百分位數曲線 (綠線), 第十百分位數曲線 (藍線) 和眞實曲線 (黑線)。

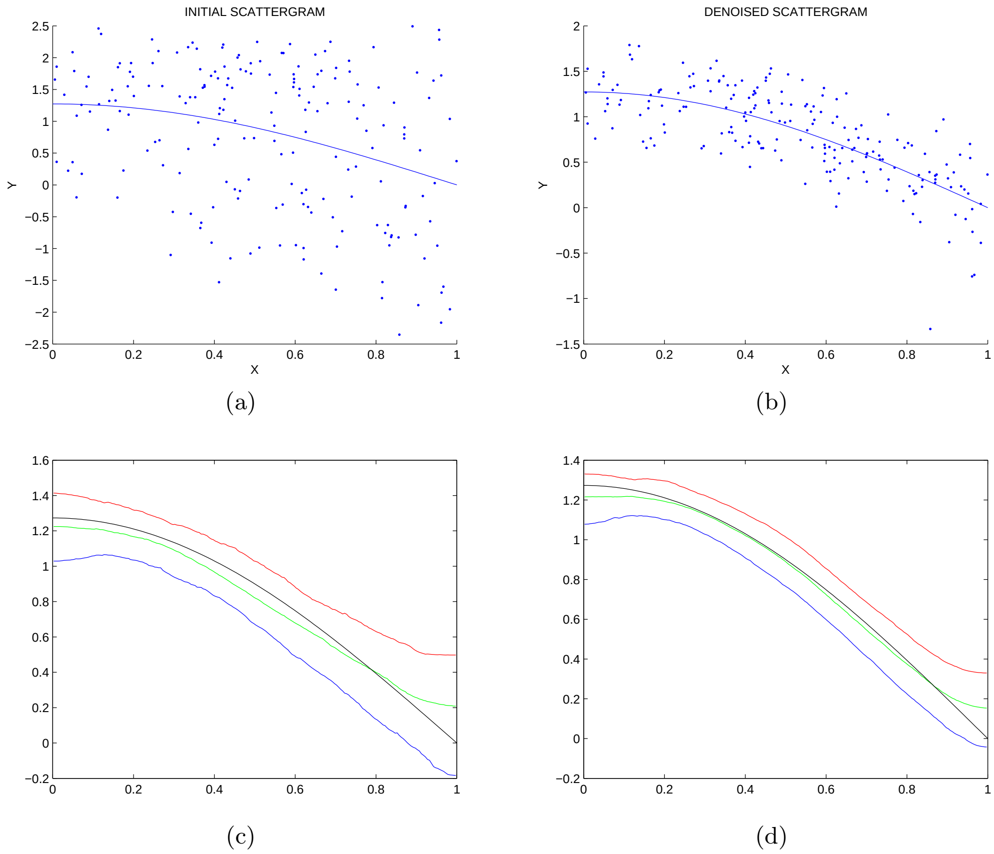


圖 3 $n = 200$, (a) 和 (b) 分別是實驗 2 $\{(X_l, Y_l)\}$ 和 $\{(X_l, \tilde{Y}_l)\}$ 的散點圖。(c) 和 (d) 分別爲實驗 2 中 IS 估計和 DS 估計的第九十百分位數曲線 (紅線), 第五十百分位數曲線 (綠線), 第十百分位數曲線 (藍線) 和眞實曲線 (黑線)。

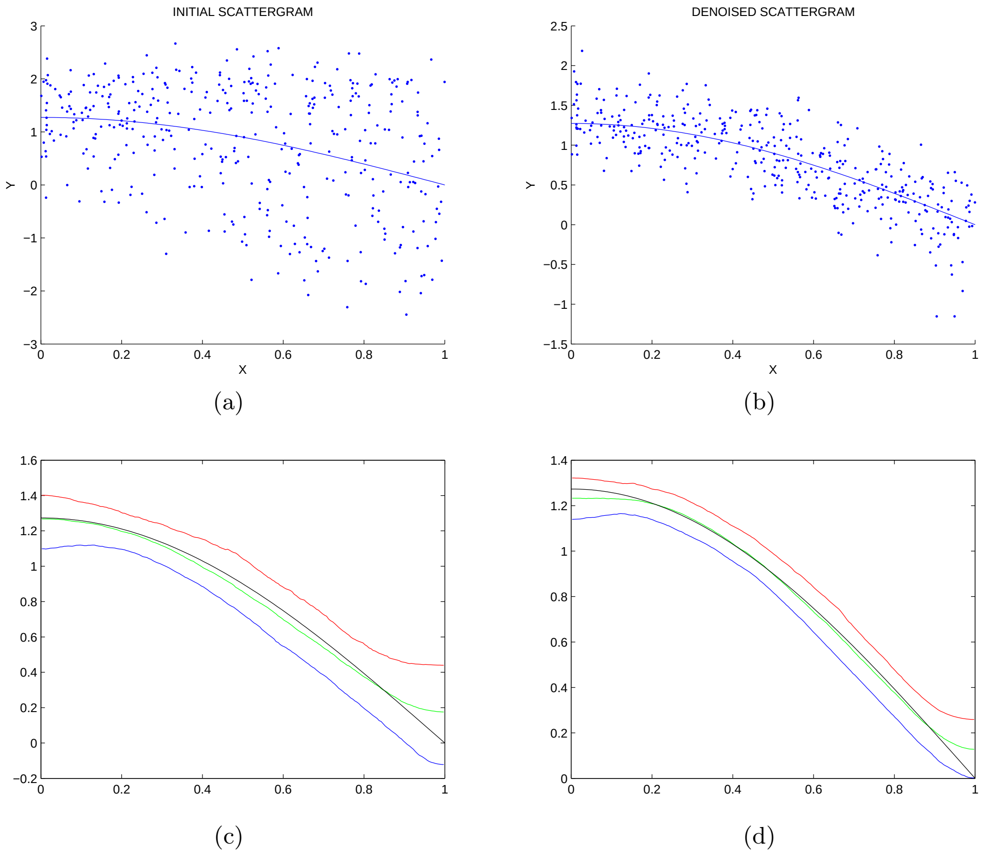


圖 4 $n = 400$, (a) 和 (b) 分別是實驗 2 $\{(X_l, Y_l)\}$ 和 $\{(X_l, \tilde{Y}_l)\}$ 的散點圖。(c) 和 (d) 分別爲實驗 2 中 IS 估計和 DS 估計的第九十百分位數曲線 (紅線), 第五十百分位數曲線 (綠線), 第十百分位數曲線 (藍線) 和眞實曲線 (黑線)。

表 1 $\left(\frac{AISEDS}{AISEIS}\right)100$

	$n=200$			$n=400$		
	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$
實驗 1	53.0	64.7	67.7	45.2	61.0	69.2
實驗 2	36.2	49.4	59.1	32.6	50.9	62.6

表 2 $\left(\frac{AISEO}{AISEDS}\right)100$

	$n=200$			$n=400$		
	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$
實驗 1	31.4	58.7	72.3	33.2	64.1	74.3
實驗 2	38.7	68.3	80.4	39.3	70.9	79.5

表 3 $\left(\frac{AISEDS}{AISEIS}\right)100$

	$n=200$			$n=400$		
	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$	$\sigma^2=0.1$	$\sigma^2=0.5$	$\sigma^2=1$
實驗 3	89.3	90.7	94.3	79.3	89.7	93.3

附錄

定理 **1** 之證明**:**

$$\begin{aligned} a_i &= \int_0^2 g_1(t)\psi_i(t)dt \quad \Rightarrow g_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i(t) \\ &\Rightarrow g(x,z) = g_1(x+z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\psi_i(x+z) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos\left(\tfrac{i\pi(x+z)}{2}\right) \\ &\qquad = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\cos\left(\tfrac{i\pi x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{i\pi x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{A.1}$$

$f(x) = \int_0^1 g(x,z) f_{Z|X}(z)dz = \int_0^1 g(x,z) f_Z(z)dz$ (因爲 X 和 Z 互相獨立),

$$\begin{aligned} &< f(x), \varphi_j(x) >= \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 g(x,z)f_Z(z)dz\right]\varphi_j(x)dx \\ &= a_0C_{0,j} + \int_0^1\left\{\int_0^1\left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(\cos\left(\tfrac{i\pi x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{i\pi x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right)\right)\right]\varphi_j(x)dx\right\} f_Z(z)dz \\ &= a_0C_{0,j} + \int_0^1\left\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i\left(C_{i,j}\cos\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right) - D_{i,j}\sin\left(\tfrac{i\pi z}{2}\right)\right)\right\} f_Z(z)dz \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\left\{C_{i,j}\mathrm{E}\left[\cos\tfrac{i\pi Z}{2}\right] - D_{i,j}\mathrm{E}\left[\sin\tfrac{i\pi Z}{2}\right]\right\}, \end{aligned}$$

因爲 $f(x) \in L^2[0,1]$, 且 $\{\varphi_j(x)|j=0,1,\ldots\}$ 爲 $L^2[0,1]$ 的一組正規基底, 所以

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} < f(x), \varphi_j(x) > \varphi_j(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_iC_{i,j}\mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_iD_{i,j}\mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]\varphi_j(x)。 \end{aligned}$$

因爲

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} C_{0,j}\varphi_j(x),\ \cos\left(\frac{i\pi x}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} C_{i,j}\varphi_j(x),\ \sin\left(\frac{i\pi x}{2}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} D_{i,j}\varphi_j(x),$$

所以由 (A.1)

$$g(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_iC_{i,j}\cos\frac{i\pi z}{2}\varphi_j(x) - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_iD_{i,j}\sin\frac{i\pi z}{2}\varphi_j(x),$$

最後得証

$$\begin{aligned} h(x,z) &= g(x,z) - f(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i C_{i,j}\left[\cos\tfrac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\cos\tfrac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{i,j}\left[\sin\tfrac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\sin\tfrac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x)。 \end{aligned}$$

爲了證明定理 2, 我們需要以下引理的結果, 稍後我們再驗證。

引理 1. $\sum_{l=1}^{n} |A_{rl}| = \sum_{l=1}^{n} |s^{-1}\int_{B_l}\varphi_r(x)dx| \le \sqrt{2}$。

引理 2. $\mathrm{E}A_{rl}^4 \le Cn^{-4}$, 這裡的 C 跟 r 與 l 無關, 且

$$\sum_{l=1}^{n}\varphi_i(X_{(l)})A_{rl} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_r(x)dx + isn^{-1}\tau_{ir},$$

$\mathrm{E}\tau_{ir}^4 \le C$ 對於所有的 i 和 r。

引理 3. 定義

$$\tilde{p}_{-l}(x) = \max\left(\gamma_n, \sum_{i=1}^{N_p}\tilde{p}_{-li}\psi_i(x)\right),\ \tilde{p}_{-li} = \frac{1}{n}\sum_{t\ne l}^{n}\psi_i(T_{(t)}),$$

$$N_p = 1 + \lfloor[\ln(n)]^{\ln(n)(\ln(n+20))}\rfloor, \gamma_n = \frac{1}{2\ln(\ln(n+20))},$$

則

$$\max_{1\le l\le n}\max_{t\in[0,2]}|\tilde{p}_{-l}(x) - \tilde{p}(x)| \le CN_p n^{-1}。$$

引理 4. 定義

$$\begin{aligned} \tilde{a}_i &= n^{-1}\sum_{t=1}^{n} Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\tilde{p}^{-1}(T_{(t)}) \\ &= \left[n^{-1}Y_{(l)}\psi_i(T_{(l)})\tilde{p}^{-1}(T_{(l)}) + n^{-1}\sum_{t\ne l} Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\frac{\tilde{p}_{-l}(T_{(t)}) - \tilde{p}(T_{(t)})}{\tilde{p}_{-l}(T_{(t)})\tilde{p}(T_{(t)})}\right] \\ &\quad + \left[n^{-1}\sum_{t\ne l}^{n} Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\tilde{p}_{-l}^{-1}(T_{(t)})\right] \\ &=: \tilde{a}_{li} + \tilde{a}_{-li}, \end{aligned}$$

則

$$\max_{1\le l\le n}\max_{i\le N_h}\mathrm{E}\tilde{a}_{li}^4\le C\gamma_n^{-4}n^{-4}N_p^4,$$

同樣地, 定義

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{-l_1i}&=n^{-1}\sum_{t\ne l_1}^{n}Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\tilde{p}_{-l_1}^{-1}(T_{(t)})\\&=\left[n^{-1}Y_{(l_2)}\psi_i(T_{(l_2)})\tilde{p}_{-l_1}^{-1}(T_{(l_2)})+n^{-1}\sum_{t\ne l_1,l_2}Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\frac{\tilde{p}_{-l_1,l_2}(T_{(t)})-\tilde{p}_{-l_1}(T_{(t)})}{\tilde{p}_{-l_1,l_2}(T_{(t)})\tilde{p}_{-l_1}(T_{(t)})}\right]\\&\quad+\left[n^{-1}\sum_{t\ne l}^{n}Y_{(t)}\psi_i(T_{(t)})\tilde{p}_{-l}^{-1}(T_{(t)})\right]\\&=:\tilde{a}_{l_1l_2i}+\tilde{a}_{-l_1l_2i},\end{aligned}$$

則

$$\max_{l_1,l_2}\max_{i\le N_h}\mathrm{E}\tilde{a}_{l_1l_2i}^4\le C\gamma_n^{-4}n^{-4}N_p^4。$$

引理 5. $\mathrm{E}\max_{i,j\le N_h}(\tilde{a}_i-a_i)^4\le C\gamma_n^{-4}[N_p^{-1}]$。

定理 2 之證明:

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_r&=\sum_l[Y_{(l)}-\tilde{h}(X_{(l)},Z_{(l)})]A_{rl}\\&=\sum_l[Y_{(l)}^*+h(X_{(l)},Z_{(l)})-\tilde{h}(X_{(l)},Z_{(l)})]A_{rl}\\&=\sum_l Y_{(l)}^*A_{rl}+\sum_l[h(X_{(l)},Z_{(l)})-\tilde{h}(X_{(l)},Z_{(l)})]A_{rl}\\&=:\hat{\theta}_r^*+\delta_r,\end{aligned}$$

因此

$$\hat{\theta}_r-\hat{\theta}_r^*=\delta_r,$$

且我們知道

$$\begin{aligned} h(x,z) &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &=: \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} a_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\cos\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} a_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \mathrm{E}\left[\sin\frac{i\pi Z}{2}\right]\right]\varphi_j(x) + h_n(x,z), \\ \tilde{h}(x,z) &= \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} \tilde{a}_i C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} \tilde{a}_i D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^2\right]\varphi_j(x), \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(x,z) - h(x,z) &= \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_i - a_i)\, C_{i,j}\left[\cos\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad + \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} a_i C_{i,j}\left[\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_i - a_i)\, D_{i,j}\left[\sin\frac{i\pi z}{2} - \bar{\psi}_i^2\right]\varphi_j(x) \\ &\qquad - \sum_{j=0}^{N_h}\sum_{i=0}^{N_h} a_i D_{i,j}\left[\mathrm{E}\sin\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^2\right]\varphi_j(x) - h_n(x,z), \end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
-\delta_r &= \sum_l [\tilde{h}(X_{(l)}, Z_{(l)}) - h(X_{(l)}, Z_{(l)})]A_{rl} \\
&= \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_i - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&\quad + \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} a_i C_{i,j} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&\quad + \left[-\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_i - a_i)\, D_{i,j} \left(\sin\frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \bar{\psi}_i^2\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&\quad + \left[-\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} a_i D_{i,j} \left(\mathrm{E}\sin\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^2\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] + \left[-\sum_l h_n(X_{(l)}, Z_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&=: D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5。
\end{aligned}
$$

容易驗證的, $\mathrm{E}(\delta_r)^2 \leq 5[\mathrm{E}D_1^2 + \mathrm{E}D_2^2 + \mathrm{E}D_3^2 + \mathrm{E}D_4^2 + \mathrm{E}D_5^2]$。

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_{-li} - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&\quad + \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_{li})\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&=: D_{11} + D_{12}, \\
|D_{12}| &\leq C \left(\sum_{i,j \leq N_h} |\tilde{a}_{li}|\right) \left(\sum_l |A_{rl}|\right) \leq C \left(\sum_{i,j \leq N_h} |\tilde{a}_{li}|\right), \\
\mathrm{E}D_{12}^2 &\leq C N_h^4 N_p^2 n^{-2} \gamma_n^{-2} = o(1) n^{-1}, \\
D_{11} &= \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_{-li} - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2}\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&\quad + \left[\sum_l \sum_{j=0}^{N_h} \sum_{i=0}^{N_h} (\tilde{a}_{-li} - a_i)\, C_{i,j} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl}\right] \\
&=: V_1 + V_2。
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_1^2 =& \sum_l \left[A_{rl} \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} (\tilde{a}_{-li} - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos \frac{i\pi Z_{(l)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2}\right) \varphi_j(X_{(l)}) \right]^2 \\
&+ \sum_{l_1\neq l_2} \left[A_{rl_1} \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} (\tilde{a}_{-l_1 i} - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos \frac{i\pi Z_{(l_1)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2}\right) \varphi_j(X_{(l_1)}) \right] \\
&\quad \left[A_{rl_2} \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} (\tilde{a}_{-l_2 i} - a_i)\, C_{i,j} \left(\cos \frac{i\pi Z_{(l_2)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2}\right) \varphi_j(X_{(l_2)}) \right] \\
=:& V_{11} + V_{12}, \\
\mathrm{E}V_{11} \le& C\mathrm{E}\sum_l \left[|A_{rl}| \sum_{j\le N_h}\sum_{i\le N_h} |\tilde{a}_i - a_i| \right]^2 + C\mathrm{E}\sum_l \left[|A_{rl}| \sum_{j\le N_h}\sum_{i\le N_h} |\tilde{a}_{li}| \right]^2 \\
\le& CN_h^2 \sum_l \mathrm{E}\left[|A_{rl}| \max_{i,j\le N_h} |\tilde{a}_i - a_i| \right]^2 + CN_h^2 \sum_l \max_l \max_{i,j\le N_h} \mathrm{E}[|A_{rl}||\tilde{a}_{li}|]^2 \\
\le& CN_h^2 \sum_l \mathrm{E}^{\frac12}[A_{rl}^4] \left[\mathrm{E}^{\frac12}\left[\max_{i,j\le N_h} |\tilde{a}_i - a_i|^4 \right] + \max_l \max_{i,j\le N_h} \mathrm{E}^{\frac12}[|\tilde{a}_{li}|^4] \right] \\
\le& CN_h^2 \sum_l \mathrm{E}^{\frac12}[A_{rl}^4] \left[Cr_n^{-4}N_p^{-1} + r_n^{-2}n^{-2}N_p^2 \right] = o(1)n^{-1}, \\
\mathrm{E}V_{12} \le& \sum_{l_1\neq l_2} \left\{ \mathrm{E}\left[A_{rl_1} \sum_{j\le N_h}\sum_{i\le N_h} (\tilde{a}_{l_1 l_2 i})\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l_1)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} \right) \varphi_j(X_{(l_1)}) \right]^2 \right\}^{\frac12} \\
&\quad \left\{ \mathrm{E}\left[A_{rl_2} \sum_{j\le N_h}\sum_{i\le N_h} (\tilde{a}_{l_2 l_1 i})\, C_{i,j} \left(\cos\frac{i\pi Z_{(l_2)}}{2} - \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} \right) \varphi_j(X_{(l_2)}) \right]^2 \right\}^{\frac12} \\
\le& \sum_{l_1\neq l_2} \left\{ N_h^2 \mathrm{E}A_{rl_1}^4 \max_{i\le N_h} \mathrm{E}\tilde{a}_{l_1 l_2 i}^4 \right\}^{\frac14} \left\{ N_h^2 \mathrm{E}A_{rl_2}^4 \max_{i\le N_h} \mathrm{E}\tilde{a}_{l_2 l_1 i}^4 \right\}^{\frac14} = n^{-1}o(1)。\\
|V_2| \le& C\left(\max_l \max_{i\le N_h} |\tilde{a}_{-li} - a_i| \right) \sum_{i,j\le N_h} \left| \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1 \right| \sum_l |A_{rl}| \\
\le& CN_h \left(\max_l \max_{i\le N_h} |\tilde{a}_{-li} - a_i| \right) \sum_{i\le N_h} \left| \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1 \right|, \\
\mathrm{E}V_2^2 \le& CN_h^2 \mathrm{E}^{\frac12}\left[\max_l \max_{i\le N_h} (\tilde{a}_{-li} - a_i)^4 \right] \times \mathrm{E}^{\frac12}\left[\sum_{i\le N_h} \left| \mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1 \right| \right]^4 \\
\le& CN_h^2 \left\{ \mathrm{E}^{\frac12}\left[\max_{i\le N_h} (\tilde{a}_i - a_i)^4 \right] + \mathrm{E}^{\frac12}\left[\max_l \max_{i\le N_h} (\tilde{a}_{li})^4 \right] \right\} N_h^2 n^{-1} \\
=& o(1)n^{-1}。
\end{aligned}
$$

從引理 2 我們得知

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl} = \int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_r(x)dx + jsn^{-1}\tau_{jr},$$

$\mathrm{E}\tau_{jr}^4 \le C$ 對於所有的 j 和 r, 因此,

$$\begin{aligned}
|D_2| &= \left| \sum_l \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} a_i C_{i,j} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \varphi_j(X_{(l)}) A_{rl} \right| \\
&= \left| \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} a_i C_{i,j} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \left[I(j=r) + jsn^{-1}\tau_{jr}\right] \right| \\
&= \left| \sum_{i\le N_h} a_i C_{i,r} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) I(r\le N_h) \right. \\
&\qquad \left. + sn^{-1} \sum_{j\le N_h} \sum_{i\le N_h} j a_i C_{i,j} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) \tau_{jr} \right| \\
&\le \left| n^{-1} \sum_l \sum_{i\le N_h} a_i C_{i,r} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right) I(r\le N_h) \right| \\
&\qquad + sn^{-1} \left[\sum_{i,j\le N_h} (a_i C_{i,j})^2 \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \bar{\psi}_i^1\right)^2 \sum_{i,j\le N_h} j^2 \tau_{jr}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&=: D_{21} + D_{22}。
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}D_{22}^2 &= o(1)n^{-1}, \\
\mathrm{E}D_{21}^2 &= I(r\le N_h)n^{-1}\mathrm{E}\left[\sum_{i\le N_h} a_i C_{ir} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \cos\frac{i\pi Z}{2}\right)\right]^2 \\
&\le I(r\le N_h)n^{-1}N_h \sum_{i\le N_h} \mathrm{E}\left[a_i C_{ir} \left(\mathrm{E}\cos\frac{i\pi Z}{2} - \cos\frac{i\pi Z}{2}\right)\right]^2 \\
&\le CI(r\le N_h)n^{-1}N_h,
\end{aligned}$$

因爲

$$\mathrm{E}D_{22}^2 = o(1)n^{-1},\ \mathrm{E}D_{21}^2 \le CI(r\le N_h)n^{-1}N_h,$$

所以

$$\mathrm{E}D_2^2 \le Cn^{-1}\left[I(r\le N_h)N_h + o(1)\right],$$

類似的方法也可以證明

$$\mathrm{E}D_4^2 \le Cn^{-1}\left[I(r \le N_h)N_h + o(1)\right]。$$

接下來我們計算 $\mathrm{E}D_5^2$, 因爲,

$$\mathrm{E}\left[h_n(X_{(l_1)}, Z_{(l_1)})h_n(X_{(l_2)}, Z_{(l_2)})|X_1, \ldots, X_n\right] = 0,\ l_1 \ne l_2,$$
$$\int h_n^4(x,z)dxdz = o(1),$$

所以,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}D_5^2 &= \sum_l \mathrm{E}h_n^2(X_{(l_1)}, Z_{(l_1)})A_{rl}^2 \le \sum_l \left[\mathrm{E}[A_{rl}^4]\mathrm{E}[h_n^4(X_{(l_1)}, Z_{(l_1)})]\right] \\ &\le Cn^{-2}\sum_l \sqrt{\mathrm{E}[h_n^4(X_{(l_1)}, Z_{(l_1)})]} \le Cn^{-2}\sum_l \sqrt{\int h_n^4(x,z)dxdz} \\ &= o(1)n^{-1},\end{aligned}$$

綜合所有結果可知

$$\mathrm{E}\delta_r^2 \le Cn^{-1}\left[I(r \le N_h)N_h + o(1)\right]。$$

我們現在來證明引理 1–5:

引理 **1** 之證明**:** $\sum_l \left|s^{-1}\int_{B_l}\varphi_r(x)dx\right| \le \sum_l \left|s^{-1}\int_{B_l}dx\right| \le \sqrt{2}$。

引理 **2** 之證明**:** 如 Efromovich and Pinsker (1996) 的 (3.14) 和 (3.26)。

引理 **3** 之證明**:** 已知

$$\tilde{p}_{-li} = \frac{1}{n}\sum_{t\ne l}^{n}\psi_i(T_{(t)}),\ N_p = 1 + \lfloor[\ln(n)]^{\ln(n)(\ln(n+20))}\rfloor,\ \gamma_n = \frac{1}{2\ln(\ln(n+20))},$$

而且,

$$|\tilde{p}_{-li} - \tilde{p}_i| = n^{-1}|\psi_i(T_{(l)})| \le \max_{i\le N_p}\max_x |\psi_i(x)|n^{-1} \le Cn^{-1},$$

所以,

$$\max_{1\le l\le n}\max_{t\in[0,2]}|\tilde{p}_{-l}(t) - \tilde{p}(t)| \le CN_pn^{-1}。$$

引理 **4** 之證明**:**

$$\tilde{a}_{li} = \left[n^{-1} Y_{(l)} \psi_i(T_{(l)}) \tilde{p}^{-1}(T_{(l)}) + n^{-1} \sum_{t \neq l} Y_{(t)} \psi_i(T_{(t)}) \frac{\tilde{p}_{-l}(T_{(t)}) - \tilde{p}(T_{(t)})}{\tilde{p}_{-l}(T_{(t)}) \tilde{p}(T_{(t)})} \right],$$

$$\max_{i \leq N_h} |\tilde{a}_{li}| \leq C n^{-1} \gamma_n^{-1} (1 + |\varepsilon_{(l)}|) + C \gamma_n^{-2} \max_{t \in [0,2]} |\tilde{p}_{-l}(x) - \tilde{p}(x)| (1 + |\varepsilon_{(l)}|),$$

所以,

$$\max_{1 \leq l \leq n} \max_{i \leq N_h} \mathrm{E} \tilde{a}_{li}^4 \leq C \gamma_n^{-4} n^{-4} N_p^4 \text{。}$$

引理 **5** 之證明**:**

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_i - a_i &= n^{-1} \sum_{l=1}^{n} \left[Y_l \psi_i(T_l) \tilde{p}^{-1}(T_l) - a_i \right] \\
&= \left\{ n^{-1} \sum_{l=1}^{n} \left[Y_l \psi_i(T_l) p^{-1}(T_l) - a_i \right] \right\} + \left\{ n^{-1} \sum_{l=1}^{n} Y_l \psi_i(T_l) \frac{p(T_l) - \tilde{p}(T_l)}{p(T_l) \tilde{p}(T_l)} \right\} \\
&=: W_1 + W_2, \\
\mathrm{E} W_1^4 &= \mathrm{E} \left[n^{-1} \sum_{l=1}^{n} \left(Y_l \psi_i(T_l) p^{-1}(T_l) - a_i \right) \right]^4 \leq C n^{-2}, \\
\mathrm{E} W_2^4 &\leq C \gamma_n^{-4} \mathrm{E} \left(p(T_l) - \tilde{p}(T_l) \right)^4,
\end{aligned}$$

當 n 夠大時,

$$|\tilde{p}(t) - p(t)| \leq \left| \sum_{i=0}^{N_p} \psi_i(t) \right| + \left| \sum_{i > N_p} p_i \psi_i(t) \right|,$$

根據 Buster and Nessel (1971 p351) 的結果,

$$\mathrm{E} \left(p(T) - \tilde{p}(T) \right)^4 \leq C N_p^{-1}, \ \mathrm{E} W_2^4 \leq C \gamma_n^{-4} N_p^{-1},$$

因此,

$$\mathrm{E} \max_{i,j \leq N_h} (\tilde{a}_i - a_i)^4 \leq C \gamma_n^{-4} N_p^{-1} \text{。}$$

定理 **3** 之證明**:** 定理 2 告訴我們,

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_r - \hat{\theta}_r^*)^2 \leq C n^{-1} \left[I(r \leq N_h) N_h + o(1) \right],$$

且對於所有的 r 和 $f(x) \in \mathcal{F}(\alpha, Q)$, 可以找到一樣的 C,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\}, x) - f(x))^2 dx &= \sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j - \theta_j)^2 \\
&= \sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2 + \sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*)^2 \\
&\quad + \sum_j 2\mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*) \\
\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j^*\}, x) - f(x))^2 dx &= \sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2,
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j\}, x) - f(x))^2 dx}{\mathrm{E}\int_0^1 (\hat{f}(\{\hat{\theta}_j^*\}, x) - f(x))^2 dx} \\
&= 1 + \frac{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*)^2 + \sum_j 2\mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*)}{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2} \\
&\le 1 + \frac{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*)^2}{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2} + 2\sqrt{\frac{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j - \mu_j\hat{\theta}_j^*)^2}{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2}} \\
&= 1 + \frac{o(1)n^{-2\alpha/(2\alpha+1)}}{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2} + 2\sqrt{\frac{o(1)n^{-2\alpha/(2\alpha+1)}}{\sum_j \mathrm{E}(\mu_j\hat{\theta}_j^* - \theta_j)^2}} \\
&= 1 + o(1)。
\end{aligned}
$$

參考文獻

Butzer, P. L. and Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation*, Stuttgart: Burkhauser-Verlag.

Efromovich, S. and Pinsker, M. (1996). Sharp-optimal and adaptive estimation for heteroscedastic nonparametric regression. *Statistica Sinica*, **6**, 925–945.

Efromovich, S. (1999). *Nonparametric Curve Estimation: Methods, Theory and Applications*, New York: Springer-Verlag.

Efromovich, S. (2005). Univariate nonparametric regression in the presence of auxiliary covariates. *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1185–1201.

[民國 99 年 3 月收稿, 民國 99 年 3 月接受。]

ESTIMATING THE MAIN EFFECT OF A COVARIATE IN SINGLE-INDEX MODELS

Ming-Yen Cheng[1] **and Yu-Teng Shen**[2]

[1]**Department of Statistical Science, University College London**

[2]**Department of Mathematics, National Taiwan University**

ABSTRACT

Efromovich (2005) addresses the problem of finding a relationship between the univariate predictor and the response when regression errors, created in part by known auxiliary covariates, are too large for a reliable regression estimation. The proposed solution of Efromovich (2005) is to estimate the noise component $h(x, z) = \mathrm{E}(Y|X = x, Z = z) - \mathrm{E}(Y|X = x)$ and substract it from the response and the obtained denoise scattergram yields the optimal estimation of the regression function. Besides, Efromovich (2005) develops a theory of asymptotically optimal nonparametric univariate regression estimation in the presence of auxiliary covariates. This article discusses the problem under single-index models. The problem is to estimate the main effect of a covariate in single-index models. We employ the techniques of Efromovich (2005) to estimate the main effect and prove the obtained denoise scattergram yields an asymptotic sharp minimax estimate.

Key words and phrases: Asymptotic sharp minimax estimate, auxiliary covariates, denoised scattergram, nonparametric regression, single index model.

JEL classifications: C13, C14.